Name der Arbeit

Name des Autors

30. September 2014

Zusammenfassung

In diesem Dokument wird das Grundgerüst einer Seminarausarbeitung vorgestellt. Wir zeigen, wie man einige der vordefinierten Befehle unserer Vorlage verwendet und geben eine grobe Strukturierung an.

1 Einleitung

Hier beschreiben wir in Worten die Problemstellung unserer Arbeit. Wir versuchen dabei, Formeln u. ä. zu vermeiden. Um das Beispiel zu vervollständigen wenden wir uns einem konkreten Problem zu – wir zeigen nämlich im Verlauf dieser Arbeit, wie man mit Hilfe des bekannten Unendlichkeitsaxioms die Existenz der natürlichen Zahlen erhält und zeigen exemplarisch auf, wie man die Arithmetik darauf erklärt. Im zweiten Kapitel werden wir dazu den Begriff der induktiven Menge einführen und die Existenz einer kleinsten induktiven Menge (bezüglich Inklusion) zeigen. Im dritten Abschnitt gehen wir auf das Prinzip der vollständigen Induktion ein und geben eine Anwendung an.

2 Die natürlichen Zahlen

Wir benutzen die Definition der natürlichen Zahlen über sogenannte induktive Mengen.

2.1 Definition (Induktive Menge)
Sei $\mathcal{I}$ eine Menge. $\mathcal{I}$ heißt **induktiv**

$$:\Longleftrightarrow \emptyset \in \mathcal{I} \wedge \forall A \in \mathcal{I} : A \cup \{ A \} \in \mathcal{I}.$$

Die Existenz induktiver Mengen kann über das Unendlichkeitsaxiom zugesichert werden.

2.2 Lemma (Durchschnitte induktiver Mengen sind induktiv)
Sei $\mathfrak{I}$ eine nichtleere Menge induktiver Mengen. Dann ist auch $\bigcap \mathfrak{I}$ induktiv.

Beweis. Es gilt zunächst:

$$\begin{aligned} \emptyset \in \bigcap \mathfrak{I} &\iff \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{I} : \emptyset \in \mathcal{A} && \text{(Definition } \textstyle\bigcap\text{)} \\ &\iff \text{true} && \text{(siehe unten)} \end{aligned}$$

Die Korrektheit des letzten Schrittes folgt aus der Tatsache, dass jedes $\mathcal{A} \in \mathfrak{I}$ induktiv ist und somit $\emptyset \in \mathcal{A}$ gilt. Sei nun $A \in \bigcap \mathfrak{I}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} A \cup \{ A \} \in \bigcap \mathfrak{I} &\iff \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{I} : A \cup \{ A \} \in \mathcal{A} && \text{(Definition } \textstyle\bigcap\text{)} \\ &\iff \forall \mathcal{A} \in \mathfrak{I} : \text{true} && (\mathcal{A} \in \mathfrak{I} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ induktiv}) \\ &\iff \text{true} \end{aligned}$$

Damit ist $\bigcap \mathfrak{I}$ eine induktive Menge. □

2.3 Lemma (Kleinste induktive Menge)
Es existiert eine induktive Menge $\mathcal{I}_0$ mit der Eigenschaft, dass für jede induktive Menge $\mathcal{I}$ gilt: $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}$.

Beweis. Sei $\mathcal{M}$ eine induktive Menge (existiert nach dem Unendlichkeitsaxiom). Wir definieren $\mathfrak{I} := \{ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{M} \mid \mathcal{A} \text{ induktiv} \}$. Offensichtlich ist $\mathfrak{I} \neq \emptyset$, da $\mathcal{M} \in \mathfrak{I}$ gilt. Damit ist die folgende Setzung wohldefiniert:

$$\mathcal{I}_0 := \bigcap \mathfrak{I}.$$

Nach Lemma 2.2 wissen wir bereits, dass $\mathcal{I}_0$ induktiv ist. Sei nun $\mathcal{I}$ eine weitere induktive Menge. Dann ist wiederum nach Lemma 2.2 die Menge $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_0$ induktiv. Außerdem ist $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{M}$, also $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_0 \in \mathfrak{I}$. Damit gilt $\mathcal{I}_0 = \bigcap \mathfrak{I} \subseteq \mathcal{I} \cap \mathcal{I}_0$ und somit $\mathcal{I} \cap \mathcal{I}_0 = \mathcal{I}_0$, was äquivalent zu $\mathcal{I}_0 \subseteq \mathcal{I}$ ist. Also ist $\mathcal{I}_0$ die kleinste induktive Menge. □

2.4 Definition (Die natürlichen Zahlen)
Wir definieren die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als die nach dem Lemma 2.3 existierende kleinste induktive Menge. Im weiteren Verlauf werden wir die Elemente dieser Menge mit kleinen lateinischen Buchstaben bezeichnen. Ferner definieren wir $0 := \emptyset$.

3 Arithmetik der natürlichen Zahlen

Nach der rein mengentheoretischen Einführung widmen wir uns nun der Definition von Rechenoperationen auf den natürlichen Zahlen zu.

3.1 Definition (Nachfolgerfunktion)
Wir definieren:

$$\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n \cup \{ n \}$$

und nennen diese Funktion **die Nachfolgerfunktion auf den natürlichen Zahlen**.

Die Idee bei dieser Funktion ist, dass für eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ durch $\nu(n)$ der Nachfolger gegeben ist, den man sich anschaulich als $n + 1$ vorstellen kann.

3.2 Satz (Vollständige Induktion (abstrakt))
Sei $A \subseteq \mathbb{N}$ mit den folgenden Eigenschaften:

(a) $0 \in A$,

(b) $\forall\, n \in \mathbb{N} : n \in A \to \nu(n) \in A$.

Dann gilt $A = \mathbb{N}$.

Beweis. Die Eigenschaften (a), (b) besagen offensichtlich, dass A eine induktive Menge ist. Da $\mathbb{N}$ die kleinste induktive Menge ist, gilt $\mathbb{N} \subseteq A$. Nach Voraussetzung gilt aber auch $A \subseteq \mathbb{N}$, also $A = \mathbb{N}$. □

Die Idee an dem Satz ist folgende – will man zeigen, dass etwas für alle natürlichen Zahlen gilt, so betrachtet man die Menge jener Elemente, für welche die besagte Eigenschaft gilt. Von dieser Menge zeigt man dann, dass sie die 0 enthält und mit jedem Element n auch deren Nachfolger $\nu(n)$.

Wir wenden diesen Satz nun sofort in genau dieser Form an, um eine Darstellung der natürlichen Zahlen zu erhalten.

3.3 Lemma (Darstellung natürlicher Zahlen)
Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $n = 0$ oder es existiert $m \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $n = \nu(m)$.

Beweis. Sei $A := \{\, n \in \mathbb{N} \mid n = 0 \vee \exists\, m \in \mathbb{N} : n = \nu(m) \,\}$. Klar ist $0 \in A$. Sei $n \in A$. Wir müssen zeigen, dass $\nu(n) \in A$ gilt. Es existiert ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\nu(n) = \nu(m)$ (nämlich $m := n$). Damit ist aber $\nu(n) \in A$. Nach Satz 3.2 erhalten wir $A = \mathbb{N}$. □

4 Diskussion und Ausblick

Wir haben mit Hilfe rein mengentheoretischer Methoden und des Unendlichkeitsaxioms die natürlichen Zahlen eingeführt. Mit Hilfe der Nachfolgerfunktion haben wir dann das Induktionsprinzip bewiesen und als Anwendung die Darstellung der natürlichen Zahlen als 0 oder als Nachfolger einer anderen natürlichen Zahl erhalten. Unter Verwendung der Injektivität der Funktion ν können wir auch die Addition natürlicher Zahlen erklären, welche dann wiederum die Definition der Multiplikation und der Potenzierung zulässt. Eigenschaften dieser arithmetischen Operationen können wir jedes Mal mit Hilfe des Induktionsprinzips beweisen.

Die vorgestellte Einführung natürlicher Zahlen ist nicht die einzig naheliegende. In der Variante von Peano werden die natürlichen Zahlen direkt mit Hilfe der Nachfolgerfunktion eingeführt und Eigenschaften dieser Funktion werden axiomatisch gefordert (siehe [2]).

Weitere Hintergrundinformationen zur Einführung natürlicher Zahlen findet man in [1]. Wir verweisen weiterhin auf [3], worin die Axiome der Mengenlehre vorgestellt und untersucht werden.

Literatur

[1] R. Dedekind. *Was sind und was sollen Zahlen?* 1888.

[2] G. Peano. *Arithmetices principia nova methodo exposita*. 1889.

[3] E. Zermelo. Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I. *Mathematische Annalen*, 65:261–281, 1908.