Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Institut für Informatik
R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Serie 9

Abgabe: 15.01.2018

Wir definieren für alle Mengen A und B die Menge $B^A := \{ f \in \mathcal{P}(A \times B) \mid f \text{ Funktion} \}$, die Menge aller Funktionen von A nach B. Weiter definieren wir für alle $a, b \in \mathbb{R}$ das Intervall $[a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$.

Präsenzaufgabe 1
Gegeben seien die zwei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = 2x + 1$, und $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, wobei $g(n) = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq n \}$ von Serie 8, Präsenzaufgabe 3. Geben Sie die folgenden Mengen explizit an:

$$f(\{ 0, 1 \}) \qquad (f \circ f)(\{ 0, 1 \}) \qquad f^{-1}(\{ 1, 2 \}) \qquad g(2) \qquad g(\{ 0, 1 \}) \qquad g^{-1}(\{ \mathbb{N} \})$$

Präsenzaufgabe 2
Sei $f \colon M \to N$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass für alle $X, Y \subseteq N$ gilt: $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Präsenzaufgabe 3
Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und die Menge $\mathbb{G} := \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \}$. Vergleichen Sie die Mengen $\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), f(\mathbb{N})$ und $\mathbb{G}$ bezüglich ihrer Kardinalitäten.

Hausaufgabe 4 (2+3+3 Punkte, Klausuraufgabe im WS 2013/14)
Gegeben sei die Funktion $\Phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $\Phi(n) = f_n$, wobei $f_n \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{N}$ definiert ist durch $f_n(x) = nx$.

(a) Geben Sie mit Begründung $n \in \mathbb{N}$ so an, dass $\Phi(n) = id_{\mathbb{N}}$ ist.
(b) Zeigen Sie, dass Φ injektiv ist.
(c) Zeigen Sie, dass Φ nicht surjektiv ist.

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $|[a, b]| = |[0, 1]|$.

Hausaufgabe 6 ($3 + 4 + 1$ Punkte, Klausuraufgabe im WS 2016/17)
Es sei die Menge $\mathbb{U} := \{ 2n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \}$ gegeben.

(a) Zeigen Sie, dass für alle Mengen M, N und P gilt:

$$|M| = |N| \wedge |N| < |P| \implies |M| < |P|$$

(Hinweis: Verwenden Sie die in der Vorlesung angegebenen fundamentalen Eigenschaften der Kardinalitätsvergleiche und beweisen Sie eine Teilaussage durch Widerspruch.)

(b) Beweisen Sie $|\mathbb{U}| = |\mathbb{N}|$.
(c) Aus welchem Satz der Vorlesung folgt mit Hilfe von (a) und (b), dass $|\mathbb{U}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ gilt?

Wichtige Hinweise: Die Abschlussklausur im ersten Prüfungszeitraum findet am Donnerstag, den 8.2.2018 statt. Zeit und Ort werden demnächst bekannt gegeben. Weitere Informationen zur Klausur entnehmen Sie bitte der Vorlesungsseite. Beachten Sie bitte, dass für die Teilnahme an der Klausur eine Anmeldung über die StudiDB erforderlich ist.