CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
R. Berghammer

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 9

Präsenzaufgabe 1

Voraussetzung: Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = 2x + 1$, und $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, wobei $g(n) = \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq n \}$.
Behauptung: Es gilt:

$$f(\{0,1\}) = \{1,3\} \qquad (f \circ f)(\{0,1\}) = \{3,7\} \qquad f^{-1}(\{1,2\}) = \{0, 0.5\}$$
$$g(2) = \{0,1,2\} \qquad g(\{0,1\}) = \{\{0\},\{0,1\}\} \qquad g^{-1}(\{\mathbb{N}\}) = \emptyset$$

Beweis. - □

Präsenzaufgabe 2

Voraussetzung: Sei $f : M \to N$ eine Funktion.
Behauptung: Für alle $X, Y \subseteq N$ gilt: $f^{-1}(X \cap Y) = f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.

Beweis. Seien $X, Y \subseteq N$.
"$\subseteq$": Sei $x \in f^{-1}(X \cap Y)$. Nach der Definition des Urbilds gilt damit $f(x) \in X \cap Y$. Also ist $f(x) \in X$ und $f(x) \in Y$. Da $f(x) \in X$, ist nach Definition des Urbilds auch $x \in f^{-1}(X)$. Wegen $f(x) \in Y$, ist nach Definition des Urbilds auch $x \in f^{-1}(Y)$. Also ist $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$.
"$\supseteq$": Sei $x \in f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y)$. D.h., $x \in f^{-1}(X)$ und $x \in f^{-1}(Y)$. Wegen $x \in f^{-1}(X)$ gilt nach Definition des Urbilds, dass $f(x) \in X$. Da weiter $x \in f^{-1}(Y)$, gilt wieder nach Definition des Urbilds, dass $f(x) \in Y$. Also ist $f(x) \in X$ und $f(x) \in Y$, d.h. $f(x) \in X \cap Y$. Nach Definition des Urbilds gilt damit $x \in f^{-1}(X \cap Y)$. □

Präsenzaufgabe 3

Voraussetzung: Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und die Menge $\mathbb{G} := \{ 2n \mid n \in \mathbb{N} \}$.
Behauptung: Es gilt (u.a.) $|f(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$, $|\mathbb{N}| = |\mathbb{G}|$ und $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. Wir zeigen zunächst $|\mathbb{N}| = |\mathbb{G}|$. Definiere dazu $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{G}$, wobei $\psi(x) = 2x$.
(z.z. ψ ist injektiv und surjektiv.)
Seien $x, y \in \mathbb{N}$. Es gelte $\psi(x) = \psi(y)$. Nach der Definition von ψ gilt dann $2x = 2y$, also $x = y$. Damit ist ψ injektiv.
Sei $y \in \mathbb{G}$. Da $2|y$ gilt, gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $y = 2n$. Setze nun $x := \frac{y}{2}$. Dann ist wegen $x = \frac{y}{2} = \frac{2n}{2} = n$ auch $x \in \mathbb{N}$. Weiter ist $\psi(x) = \psi(\frac{y}{2}) = 2\frac{y}{2} = y$. Damit ist ψ surjektiv.

Wir zeigen nun $|f(\mathbb{N})| \leq |\mathbb{N}|$. Definiere dazu $\phi : f(\mathbb{N}) \to \mathbb{N}$, wobei $\phi(x) = x$. (Wegen $f(\mathbb{N}) \subseteq \mathbb{N}$ nach Definition des Bildes gilt $\phi(x) \in \mathbb{N}$.)
(z.z. ϕ ist injektiv.)
Seien nun $x, y \in f(\mathbb{N})$. Es gelte $\phi(x) = \phi(y)$. Nach der Definition von ϕ gilt dann $x = y$. Also ist ϕ injektiv.

Zuletzt gilt $|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ nach dem Satz von Cantor. □

Man könnte hier noch überprüfen, welche Beziehungen nicht gelten, oder wann z.B. $|f(\mathbb{N})| = |\mathbb{N}|$ gilt.