CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 9

Hausaufgabe 1 (2+3+3 Punkte)
Voraussetzung: Gegeben sei die Funktion $\Phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ mit $\Phi(n) = f_n$, wobei $f_n\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{N}$ definiert ist durch $f_n(x) = nx$.
Behauptung:

(a) Es gilt $\Phi(1) = id_{\mathbb{N}}$.

(b) Φ ist injektiv.

(c) Φ ist nicht surjektiv.

Beweis. (a) Sei $x \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\Phi(1)(x) \overset{\text{Def. }\Phi}{=} f_1(x) \overset{\text{Def. }f_1}{=} x \cdot 1 = x \overset{\text{Def. }id_{\mathbb{N}}}{=} id_{\mathbb{N}}(x)$. Es gilt also $\Phi(1) = id_{\mathbb{N}}$.

(b) Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\Phi(n) = \Phi(m)$. (z.z. $n = m$)
Wegen $\Phi(n) = \Phi(m)$ gilt nach Definition von Φ, dass $f_n = f_m$. Nach der Definition der Gleichheit von Funktionen gilt somit $f_n(x) = f_m(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Also gilt insbesondere $f_n(1) = f_m(1)$. Es folgt:

$$n = n \cdot 1 \overset{\text{Def. der }f_n}{=} f_n(1) = f_m(1) \overset{\text{Def. der }f_n}{=} m \cdot 1 = m\ .$$

Also ist Φ injektiv.

(c) Setze $g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $g(x) = 1$. Damit ist $g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Angenommen es gibt $n \in \mathbb{N}$ mit $\Phi(n) = g$.
Dann gilt also $f_n = \Phi(n) = g$. Also gilt $f_n(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Es gilt also auch $2 \cdot n = f_n(2) = g(2) = 1$. Da $n \in \mathbb{N}$ ist, ist dies ein Widerspruch.

□

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)
Behauptung: Für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ gilt: $|[a, b]| = |[0, 1]|$.

Beweis. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Die Gleichheit $|[a, b]| = |[0, 1]|$ zeigen wir wieder durch Angabe einer Bijektion. Sei dazu $f : [0, 1] \to [a, b]$ mit $f(t) = (1 - t)a + tb = (b - a)t + a$. Da $(b - a)t \geq 0$, ist $(b - a)t + a \geq a$, und wegen $t \leq 1$ ist $(b - a)t \geq b - a$, also $(b - a)t + a \leq b$. Damit ist $f(t) \in [a, b]$ für alle $t \in [0, 1]$.
Für den Beweis der Injektivität seien $s, t \in [0, 1]$ mit $f(s) = f(t)$. Dann ist $(b - a)t + a = (b - a)s + a$, also auch $(b - a)t = (b - a)s$ und wegen $b - a > 0$ ist damit auch $t = s$, also f injektiv.
Für den Beweis der Surjektivität sei nun $y \in [a, b]$. Dann ist $\frac{y-a}{b-a} \leq \frac{b-a}{b-a} = 1$, da $y \leq b$ und ebenso $\frac{y-a}{b-a} \geq \frac{a-a}{b-a} = 0$, da $y \geq a$. Setze also $x := \frac{y-a}{b-a} \in [0, 1]$. Dann gilt:

$$f(x) = f\left(\frac{y - a}{b - a}\right) = (b - a)\frac{y - a}{b - a} + a = y - a + a = y\ .$$

Also ist f auch surjektiv und damit bijektiv. □

Hausaufgabe 3 ($3 + 4 + 1$ Punkte)
Voraussetzung: Sei $\mathbb{U} := \{\, 2n + 1 \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ gegeben.
Behauptung:

(a) Für alle Mengen M, N und P gilt $|M| = |N| \wedge |N| < |P| \Longrightarrow |M| < |P|$.

(b) Es gilt $|\mathbb{U}| = |\mathbb{N}|$.

(c) Der Satz von Cantor liefert mit Hilfe der vorherigen Aufgabenteile $|\mathbb{U}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$.

Beweis. (a) Seien M, N und P Mengen mit $|M| = |N|$ und $|N| < |P|$. Dann gelten $|N| \leq |P|$ und $\neg(|N| = |P|)$. Aus $|M| = |N|$ und $|N| \leq |P|$ folgt mit einer der fundamentalen Eigenschaften (Satz 5.2.2 (3)), dass $|M| \leq |P|$ gilt.

Wir zeigen $\neg(|M| = |P|)$ durch einen Widerspruchsbeweis. Angenommen es gilt $|M| = |P|$, dann folgt mit $|M| = |N|$ und einer der fundamentalen Eigenschaften (Satz 5.2.2 (1)) auch $|N| = |P|$. Dies ist ein Widerspruch zu $\neg(|N| = |P|)$.

Die Annahme war somit falsch und es folgt $\neg(|M| = |P|)$, also zusammen mit $|M| \leq |P|$ die zu beweisende Aussage $|M| < |P|$.

(b) Wir definieren die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{U}$ durch $f(n) = 2n + 1$ und zeigen, dass f bijektiv ist.

Injektiv: Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = f(m)$, dann gilt $2n + 1 = 2m + 1$. Durch beidseitige Subtraktion von 1 und anschließender Division durch den Faktor 2 folgt $n = m$. f ist also injektiv.

Surjektiv: Sei $u \in \mathbb{U}$. Setze $m := (u - 1)/2$. Da $u \in \mathbb{U}$ gilt, existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $u = 2n + 1$. Es folgt

$$m = \frac{u-1}{2} = \frac{2n+1-1}{2} = \frac{2n}{2} = n$$

und damit $m \in \mathbb{N}$. Des Weiteren folgt

$$f(m) = 2m + 1 = 2\frac{u-1}{2} + 1 = u - 1 + 1 = u,$$

also ist f surjektiv und damit auch bijektiv.

Es folgt $|\mathbb{N}| = |\mathbb{U}|$ und eine fundamentale Eigenschaft der Kardinalitätsvergleiche (Satz 5.2.2 (2)) liefert die zu beweisende Aussage $|\mathbb{U}| = |\mathbb{N}|$.

(c) -

$\square$