CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 8

Präsenzaufgabe 1

Voraussetzung: -

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ gilt die Gleichung $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion über n. Wir setzen $A(n)$ für die Aussage $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

Induktionsanfang: Es ist $A(1)$ wahr, denn

$$\sum_{i=1}^{1}(2i-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2 \, .$$

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 1$ und es gelte $A(n)$, d.h. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$.

Induktionsschluss: (z.z. es gilt $A(n+1)$, d.h. $\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) = (n+1)^2$)

Wir haben:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1}(2i-1) &= (2(n+1)-1) + \sum_{i=1}^{n}(2i-1) \\
&= n^2 + 2(n+1) - 1 && \text{nach I.V.} \\
&= n^2 + 2n + 2 - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2 \, .
\end{aligned}$$

Somit gilt auch $A(n+1)$ und damit die Behauptung. $\square$

Präsenzaufgabe 2

Voraussetzung: Sei $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f\,(()) := 1 \, , \qquad f(a : s) := a \cdot f(s) \text{ für alle } a \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}^* \, .$$

Behauptung: Für alle $s, t \in \mathbb{N}^*$ gilt $f(s \,\&\, t) = f(s) \cdot f(t)$.

Beweis. Wir definieren für alle $s \in \mathbb{N}^*$ die Aussage $A(s) :\Longleftrightarrow \forall\, t \in \mathbb{N}^* : f(s \,\&\, t) = f(s) \cdot f(t)$. Die Aussage wird nun durch eine Listeninduktion bewiesen.

Induktionsanfang: Zu zeigen ist die Gültigkeit von $A(())$. Sei also $t \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:

$$f(() \,\&\, t) = f(t) = 1 \cdot f(t) = f(()) \cdot f(t) \, .$$

Induktionsvoraussetzung: Sei $s \in \mathbb{N}^*$ und es gelte $A(s)$, das heißt $\forall\, t \in \mathbb{N}^* : f(s \,\&\, t) = f(s) \cdot f(t)$.

Induktionsschritt: Sei $a \in \mathbb{N}$. Wir müssen zeigen, dass $A(a : s)$ gilt. Sei dazu $t \in \mathbb{N}^*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f((a : s) \,\&\, t) &= f(a : (s \,\&\, t)) && \text{Def. } \& \\
&= a \cdot f(s \,\&\, t) && \text{Def. } f \\
&= a \cdot f(s) \cdot f(t) && \text{Induktionsvoraussetzung} \\
&= (a \cdot f(s)) \cdot f(t) && \text{Multiplikation ist assoziativ} \\
&= f(a : s) \cdot f(t) && \text{Def. } f.
\end{aligned}$$

$\square$

Präsenzaufgabe 3

Voraussetzung: Gegeben seien die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = 2x + 1$, und $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, wobei $g(n) = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \leq n \,\}$.

Behauptung:

(a) f ist bijektiv.

(b) g ist injektiv, aber nicht surjektiv.

Beweis.

(a) zu i) (z.z. f ist injektiv.)
Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Es gelte $f(x) = f(y)$. Nach der Definition von f gilt also $2x + 1 = 2y + 1$, also $2x = 2y$, also $x = y$. Also ist f injektiv.
(z.z. f ist surjektiv.)
Sei $y \in \mathbb{R}$. Setze $x := \frac{y-1}{2}$. Dann ist $x \in \mathbb{R}$ und es gilt $f(x) = 2x + 1 = 2(\frac{y-1}{2}) + 1 = (y - 1) + 1 = y$. Also ist f surjektiv.
zu ii) (z.z. g ist injektiv.)
Seien $a, b \in \mathbb{N}$ und $g(a) = g(b)$. Wegen $a \leq a$ ist $a \in \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \leq a \,\} = g(a)$ und wegen $b \leq b$ ist $b \in \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \leq b \,\} = g(b)$. Da $g(a) = g(b)$, ist auch $a \in g(b)$ und $b \in g(a)$. Nach Definition von g gilt also $a \leq b$ und $b \leq a$. Also gilt $a = b$.
(z.z. g ist nicht surjektiv.)
Setze $A := \emptyset$. Nach Definition der Potenzmenge gilt $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen $n \leq n$ ist $n \in g(n)$, also $g(n) \neq \emptyset = A$. Dann ist nach Definition der Potenzmenge $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Damit ist g nicht surjektiv.

$\square$