CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
R. Berghammer

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 8

Hausaufgabe 1 (6 Punkte)

Voraussetzung: -

Behauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ gilt die folgende Gleichheit:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \ .$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung durch vollständige Induktion über n. Wir setzen $A(n)$ für die Aussage

$$\forall\, q \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \} : \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \ .$$

Induktionsanfang: Es ist $A(0)$ wahr, denn für alle $q \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{0} q^i = q^0 = 1 = \frac{q-1}{q-1} = \frac{q^{0+1} - 1}{q - 1} \ .$$

Induktionsvoraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $A(n)$, d.h. $\forall\, q \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \} : \sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$.

Induktionsschluss: (z.z. es gilt $A(n+1)$, d.h $\forall\, q \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \} : \sum_{i=0}^{n+1} q^i = \frac{q^{(n+1)+1}-1}{q-1}$)

Sei also $q \in \mathbb{R} \setminus \{ 1 \}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} q^i &= q^{n+1} + \sum_{i=0}^{n} q^i \\
&= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} && \text{nach I.V.} \\
&= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + \frac{q^{n+1}(q-1)}{q - 1} \\
&= \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + \frac{q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} \\
&= \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} \\
&= \frac{q^{(n+1)+1} - 1}{q - 1} \ .
\end{aligned}$$

Damit gilt auch $A(n+1)$ und damit die Behauptung. $\square$

Hausaufgabe 2 (2+7 Punkte)

Voraussetzung: Sei M eine Menge. Wir definieren die Funktion $\mathsf{menge} : M^* \to \mathcal{P}(M)$ durch $\mathsf{menge}(()) = \emptyset$ und

$$\mathsf{menge}(a : s) = \{ a \} \cup \mathsf{menge}(s) \text{ für alle } a \in M \text{ und } s \in M^* \ .$$

Behauptung:

(a) Es gilt $\mathsf{menge}(2 : 1 : 2 : ()) = \{ 1, 2 \}$.

(b) Für alle $s, t \in M^*$ gilt: $\mathsf{menge}(s \,\&\, t) = \mathsf{menge}(s) \cup \mathsf{menge}(t)$.

(a) *Beweis.* - □

(b) *Beweis.* Wir definieren für alle $s \in M^*$ die Aussage

$$A(s) :\Longleftrightarrow \forall\, t \in M^* : \mathsf{menge}(s \,\&\, t) = \mathsf{menge}(s) \cup \mathsf{menge}(t) \ .$$

I. A.: [Z. z.: $A(())$, d. h. $\forall\, t \in M^* : \mathsf{menge}(() \,\&\, t) = \mathsf{menge}(()) \cup \mathsf{menge}(t)$.]
Sei also $t \in M^*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{menge}(() \,\&\, t) &= \mathsf{menge}(t) && \text{denn } () \,\&\, t = t \\ &= \emptyset \cup \mathsf{menge}(t) \\ &= \mathsf{menge}(()) \cup \mathsf{menge}(t) \ . && \text{Def. menge} \end{aligned}$$

I. V.: Sei $s \in M^*$ und es gelte $A(s)$, d. h. es gelte $\forall\, t \in M^* : \mathsf{menge}(s \,\&\, t) = \mathsf{menge}(s) \cup \mathsf{menge}(t)$.
I. S.: [Z. z.: $\forall\, a \in M : A(a : s)$.]
Sei $a \in M$. [Z.z.: $A(a : s)$, d. h. $\forall\, t \in M^* : \mathsf{menge}((a : s) \,\&\, t) = \mathsf{menge}(a : s) \cup \mathsf{menge}(t)$.]
Sei $t \in M^*$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \mathsf{menge}((a : s) \,\&\, t) &= \mathsf{menge}(a : (s \,\&\, t)) && \text{Definition } \& \\ &= \{\, a \,\} \cup \mathsf{menge}(s \,\&\, t) && \text{Definition menge} \\ &= \{\, a \,\} \cup (\mathsf{menge}(s) \cup \mathsf{menge}(t)) && \text{Induktionsvoraussetzung} \\ &= (\{\, a \,\} \cup \mathsf{menge}(s)) \cup \mathsf{menge}(t) && \cup \text{ assoziativ} \\ &= \mathsf{menge}(a : s) \cup \mathsf{menge}(t) \ . && \text{Definition menge} \end{aligned}$$

□

Hausaufgabe 3 ($3 + 4 + 3$ Punkte)
Voraussetzung: Sei M eine nichtleere Menge. Wir betrachten die Funktion $\mathsf{kopf} : M^+ \to M$.

Behauptung:

(a) kopf ist surjektiv.

(b) Die folgenden Funktionen sind wohldefinierte verschiedene Rechtsinverse von kopf.

$$f_1 : M \to M^+,\ f_1(a) := a : () \quad \text{und} \quad f_2 : M \to M^+,\ f_2(a) := a : a : ().$$

(c) kopf ist nicht injektiv.

(a) *Beweis.* *1. Variante:* Sei $a \in M$. Setze $s := a : ()$. Dann gilt $s \in M^+$, denn $s \neq ()$ und nach Definition gilt

$$\mathsf{kopf}(s) = \mathsf{kopf}(a : ()) = a \ .$$

Damit ist kopf surjektiv.

2. Variante: Nach Aufgabenteil (b) besitzt kopf eine Rechtsinverse. Nach dem Satz über die Charakterisierung der Surjektivität durch Rechtsinverse (5.1.20) ist kopf damit surjektiv. □

(b) *Beweis.* Sei $a \in M$. Es gilt $f_1(a) \neq () \neq f_2(a)$, also sind f_1, f_2 wohldefiniert. Außerdem gilt:

$$(\mathsf{kopf} \circ f_1)(a) = \mathsf{kopf}(f_1(a)) = \mathsf{kopf}(a : ()) = a = \mathrm{id}_M(a) \ ,$$

und ebenso gilt auch

$$(\mathsf{kopf} \circ f_2)(a) = \mathsf{kopf}(f_2(a)) = \mathsf{kopf}(a : a : ()) = a = \mathrm{id}_M(a) \ .$$

Damit sind beide Funktionen Rechtsinverse. Um zu zeigen, dass $f_1 \neq f_2$ gilt, müssen wir ein $x \in M$ angeben mit $f_1(x) \neq f_2(x)$. Wegen $M \neq \emptyset$ existiert ein $x \in M$. Es gilt $() \neq x : ()$, weil $()$ leer ist und $x : ()$ nichtleer. Also ist nach der Eigenschaft der Listengleichheit $x : () \neq x : x : ()$. Insbesondere ist also $f_1(x) = x : () \neq x : x : () = f_2(x)$ und damit $f_1 \neq f_2$. □

(c) *Beweis.* *1. Variante:* Wir betrachten die beiden verschiedenen Rechtsinversen aus Aufgabenteil (b). Dann existiert ein $x \in M$ mit $f_1(x) \neq f_2(x)$. Setze nun $a := f_1(x)$ und $b := f_2(x)$. Dann gilt $a, b \in M^+$ und $a \neq b$, aber

$$\mathsf{kopf}(a) = \mathsf{kopf}(f_1(x)) = x = \mathsf{kopf}(f_2(x)) = \mathsf{kopf}(b) \ ,$$

weil f_1, f_2 Rechtsinverse sind. Also ist kopf nicht injektiv.

2. Variante: Angenommen, kopf wäre injektiv. Nach Aufgabenteil (a) ist kopf dann bereits bijektiv, hat also insbesondere nach Satz 5.1.12 genau eine Rechtsinverse. Das ist ein Widerspruch zu (b), weil wir dort zwei verschiedene Rechtsinverse gesehen haben. □