CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18 Abgabe: 11.12.2017

Serie 6

Hausaufgabe 1 (2+4 Punkte)

Voraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$. Sei Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse eines n-fachen Würfelwurfs mit einem 6-seitigen Würfel. Gegeben seien außerdem die folgenden Ereignisse:

A: Es wird nicht zweimal hintereinander das Gleiche gewürfelt.

B: Die Summe der gewürfelten Zahlen ist eine gerade Zahl.

C: Mindestens zweimal wird eine 1 gewürfelt.

D: Eine 6 wird genau einmal gewürfelt.

Behauptung:

(a) Es gilt $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}^n$ und $|\Omega| = 6^n$.

(b) Es gilt

$$
\begin{aligned}
A &= \{ \omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow \omega_i \neq \omega_{i+1} \} \\
B &= \left\{ \omega \in \Omega \mid 2 | \sum_{i=1}^{n} \omega_i \right\} \\
C &= \{ \omega \in \Omega \mid \exists i, j \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \land 1 \leq j \leq n \land i \neq j \land \omega_i = 1 \land \omega_j = 1 \} \\
D &= \{ \omega \in \Omega \mid \exists i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \land \omega_i = 6 \land (\forall j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n \land j \neq i \Rightarrow \omega_j \neq 6) \} .
\end{aligned}
$$

Beweis.

(a) Es ist $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}^n$ und nach Satz 3.1.3 gilt

$$|\Omega| = | \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}^n | = | \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \} |^n = 6^n.$$

□

Bei Aufgabenteil (b) gibt es viele richtige Lösungen (siehe Präsenzaufgabe 1).

Hausaufgabe 2 (3+3 Punkte)

Voraussetzung: Für alle $s, t \in \mathbb{N}^+$ definieren wir $s \trianglelefteq t :\Longleftrightarrow (\mathsf{kopf}(s)) = \mathsf{rest}(t)$.

Behauptung:

(a) Es gilt $\exists\, s, t, u \in \mathbb{N}^+ : t \trianglelefteq s \land u \trianglelefteq s \land t \neq u \Longleftrightarrow$ **wahr**.

(b) Es gilt $\exists\, t \in \mathbb{N}^+ : \forall\, s \in \mathbb{N}^+ : \neg(s \trianglelefteq t) \Longleftrightarrow$ **wahr**.

Beweis.

(a) Setze $s := 0 : 0 : ()$, $t := 0 : ()$ und $u := 0 : 0 : ()$. Dann gilt $s, t, u \in \mathbb{N}^+$ wegen $0 \in \mathbb{N}$ und $0 : () \in \mathbb{N}^+$. Nach der Definition von kopf gilt dann $(\mathsf{kopf}(t)) = (0) = (\mathsf{kopf}(u))$. Nach Definition der Gleichheit von Listen gilt außerdem $() \neq 0 : ()$, also $t \neq u$. Nach der Definition von rest und des Linksanfügens gilt $\mathsf{rest}(s) = (0)$, also gilt nach der Definition von $\trianglelefteq$, dass $t \trianglelefteq s$ und $u \trianglelefteq s$.

(b) Setze $t := 0 : 0 : 0 : ()$. Dann gilt $t \in \mathbb{N}^+$ wegen $0 \in \mathbb{N}$ und $0 : 0 : () \in \mathbb{N}^+$. Es gilt nach Definition von rest dann $\mathsf{rest}(t) = 0 : 0 : ()$. Sei $s \in \mathbb{N}^+$. Dann ist $(\mathsf{kopf}(s)) = \mathsf{kopf}(s) : ()$. Nach Definition der Gleichheit von Listen gilt also $\mathsf{rest}(t) \neq (\mathsf{kopf}(s))$ wegen $() \neq 0 : ()$. Also gilt nicht $s \trianglelefteq t$ nach Definition von $\trianglelefteq$.

□

Hausaufgabe 3 (2+2+2+2 Punkte)
Voraussetzung: -
Behauptung: Es gilt:

(a) Es gilt $(), (0) \in \mathbb{N}^*$

(a) Es gilt $(0, 0, 0), (0, 1, 1) \in \prod_{i=1}^{3} (\mathbb{N} \setminus \{ i \})$

(b) Es gilt $((0), (0, 1)), ((0), (1)) \in \prod_{i=1}^{2} \mathbb{N}^+$

(c) Es gilt $\{ (\emptyset, \{ 0 \}) \}, \{ (\emptyset, \emptyset) \} \in \mathcal{P}\left(\prod_{i=1}^{2} \mathcal{P}(\mathbb{N})\right)$

Beweis. - □