CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Mathematatik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge für Serie 5

Präsenzaufgabe 1

Wir haben die folgenden prädikatenlogischen Formeln und ihre Negationen:

(a) $\forall\, x : F(x) \Rightarrow \exists\, y : T(y, x)$
$\exists\, x : F(x) \wedge \forall\, y : \neg T(y, x)$

(b) $B(s04, hsv) \Rightarrow \exists\, y : F(y) \wedge \neg V(s04, y)$
$B(s04, hsv) \wedge \forall\, y : F(y) \Rightarrow V(s04, y)$

(c) $\forall\, x : F(x) \wedge V(hsv, x) \wedge x \neq bvb \Rightarrow B(bvb, x)$
$\exists\, x : F(x) \wedge V(hsv, x) \wedge x \neq bvb \wedge \neg B(bvb, x)$

Umgangssprachliche Beschreibungen für die gegebenen Formeln sind z.B.:

(d) Keine Fußballmannschaft gewinnt jedes Spiel.

(e) Es gibt eine Fußballmannschaft, die jede andere Fußballmannschaft besiegt.

Präsenzaufgabe 2

Voraussetzung: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, wobei $f(n) = \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq n \,\}$.
Behauptung: Dann gilt: $\forall\, n \in \mathbb{N} : \exists\, m \in \mathbb{N} : f(n) \subset f(m) \iff$ **wahr**.
Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Setze $m := n + 1$. (z.z. $f(n) \subseteq f(m)$ und $f(n) \neq f(m)$)
Da $n \in \mathbb{N}$, ist auch $m = n + 1 \in \mathbb{N}$. Sei $(x, y) \in f(n)$. Dann gilt nach Definition von f, dass $x + y \leq n$, also auch $x + y \leq n \leq n + 1 = m$. Also ist $(x, y) \in f(m)$ wieder nach Definition von f. Damit gilt $f(n) \subseteq f(m)$.
(z.z. $f(n) \neq f(m)$, d.h. es gibt $(a, b) \in f(m)$ mit $(a, b) \notin f(n)$)
Setze $(a, b) := (m, 0)$. Dann gilt wegen $a + b = m + 0 = n + 1 = m$ nach Definition von f, dass $(a, b) \in f(m)$. Es gilt aber $n + 1 > n$, also $(a, b) \notin f(n)$ nach Definition von f. □

Präsenzaufgabe 3

Voraussetzung: Gegeben sei eine Menge M.
Behauptung: Es gilt: **wahr** $\Longrightarrow \bigcap \mathcal{P}(M) = \emptyset$.
Beweis. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\bigcap \mathcal{P}(M) = \emptyset &\iff \neg\exists\, x : x \in \bigcap \mathcal{P}(M) && \text{Def. } \emptyset \\
&\iff \forall\, x : \neg(x \in \bigcap \mathcal{P}(M)) && \text{Satz 2.3.9(2)} \\
&\iff \forall\, x : \neg(\forall\, X : X \in \mathcal{P}(M) \Rightarrow x \in X) && \text{Def. } \bigcap \\
&\iff \forall\, x : \exists\, X : \neg(X \in \mathcal{P}(M) \Rightarrow x \in X)) && \text{Satz 2.3.9(1)} \\
&\iff \forall\, x : \exists\, X : X \in \mathcal{P}(M) \wedge \neg(x \in X) && \text{Neg. Impl.} \\
&\Longleftarrow \forall\, x : \emptyset \in \mathcal{P}(M) \wedge \neg(x \in \emptyset) && \text{Zeuge} \\
&\iff \forall\, x : \textbf{wahr} && \text{Def. } \mathcal{P} \text{ und } \emptyset \\
&\iff \textbf{wahr} && \text{Satz 2.3.9 (5)}
\end{aligned}
$$

□