CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge für Serie 4

Präsenzaufgabe 1

Dieses Rätsel soll zeigen, dass wir in Kapitel 2 der Vorlesung nun Mittel kennengelernt haben, solche Rätsel mathematisch anzugehen und zu lösen.

Voraussetzung: Wir bezeichnen mit A, B bzw. C die Aussagen, dass Anna, Ben bzw. Carsten Täter sind.
Behauptung: Ben ist der Täter.

Beweis. Die drei letzten Spalten der folgenden Wahrheitstabelle entsprechen den gegebenen Informationen:

A	B	C	$B \vee C \Rightarrow \neg A$	$\neg A \vee \neg C \Rightarrow B$	$C \Rightarrow A$
W	W	W	F	W	W
W	W	F	F	W	W
W	F	W	F	W	W
W	F	F	W	F	W
F	W	W	W	W	F
F	W	F	W	W	W
F	F	W	W	F	F
F	F	F	W	F	W

Anhand der Wahrheitstabelle (bzw. der drittletzten Zeile darin) erkennen wir, dass Ben alleiniger Täter ist, da dies die einzige Belegung ist, die dazu führt, dass alle drei Formeln den Wert W haben. □

Präsenzaufgabe 2

Voraussetzung: Gegeben seien aussagenlogische Formeln A, B, C und folgende Zeichenketten:

(1) $A \cup B \Rightarrow C$ (2) $(A \wedge \mathsf{F}) \Rightarrow C$ (3) $A \Longrightarrow A$
(4) $\neg(A \wedge \textbf{wahr})$ (5) $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \wedge \neg B)$ (6) $A \Rightarrow \neg A$

Behauptung:

(i) (4), (5) und (6) sind aussagenlogische Formeln.

(ii) (5) ist logisch äquivalent zu **wahr**.

Beweis. (i) (1) und (3) sind keine aussagenlogische Formeln, da sowohl $\cup$ als auch $\Longrightarrow$ keine der in Definition 2.2.1 angegebenen Junktoren sind. (2) ist keine aussagenlogische Formel, da $\mathsf{F} \in \mathbb{B}$ und selbst keine aussagenlogische Formel ist.

(ii) Wir zeigen $\neg(A \Rightarrow B) \Longleftrightarrow (A \wedge \neg B)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} \neg(A \Rightarrow B) &\Longleftrightarrow \neg(\neg A \vee B) && \text{Eig. der Implikation} \\ &\Longleftrightarrow \neg\neg A \wedge \neg B && \text{de Morgan} \\ &\Longleftrightarrow A \wedge \neg B && \text{doppelte Negation.} \end{aligned}$$

$\square$

Präsenzaufgabe 3

Voraussetzung: Gegeben seien eine Menge X und die Funktionen $f, g : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, wobei $f(M, N) = \overline{M \setminus N}$ und $g(M, N) = \overline{M} \cup N$.

Behauptung: Es gilt $f = g$.

Beweis. Nach Satz 1.4.11 genügt es, zu zeigen, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ gilt. Sei $x \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es $M, N \in \mathcal{P}(X)$ mit $x = (M, N)$. Zu zeigen ist also, dass $f(M, N) = g(M, N)$, also $\overline{M \setminus N} = \overline{M} \cup N$ gilt. Dies zeigen wir durch logische Umformungen. Sei dafür $a \in X$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
a \in \overline{M \setminus N} &\iff a \in X \wedge a \notin M \setminus N && \text{Def. abs. Komplement} \\
&\iff a \in X \wedge \neg(a \in M \setminus N) && \text{Negation von } \in \\
&\iff a \in X \wedge \neg(a \in M \wedge a \notin N) && \text{Def. Komplement} \\
&\iff a \in X \wedge \neg(a \in M \wedge \neg(a \in N)) && \text{Negation von } \in \\
&\iff a \in X \wedge (\neg(a \in M) \vee \neg(\neg(a \in N))) && \text{De Morgan} \\
&\iff a \in X \wedge (\neg(a \in M) \vee a \in N) && \text{doppelte Negation} \\
&\iff a \in X \wedge (a \notin M \vee a \in N) && \text{Negation von } \in \\
&\iff (a \in X \wedge a \notin M) \vee (a \in X \wedge a \in N) && \text{Distributivgesetz} \\
&\iff a \in \overline{M} \vee (a \in X \wedge a \in N) && \text{Def. abs. Komplement} \\
&\iff a \in \overline{M} \vee (a \in X \cap N) && \text{Def. Schnitt} \\
&\iff a \in \overline{M} \vee a \in N && N \subseteq X \\
&\iff a \in \overline{M} \cup N && \text{Def. Vereinigung}
\end{aligned}
$$

$\square$