CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

Institut für Informatik

R. Berghammer

# Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

## Lösungsvorschläge für Serie 3

**Präsenzaufgabe 1**

*Voraussetzung:* Gegeben seien die Mengen $A := \{0, 1\}$ und $B := \{1, 2\}$.

*Behauptung:*

(a) Es gilt

$$A \times B = \{ (0,1), (0,2), (1,1), (1,2) \} \text{ und}$$
$$B \times \mathcal{P}(B) = \{ (1,\emptyset), (2,\emptyset), (1,\{1\}), (2,\{1\}), (1,\{2\}), (2,\{2\}), (1,\{1,2\}), (2,\{1,2\}) \}.$$

Es gilt $|A \times B| = 4$ und $|B \times \mathcal{P}(B)| = 8$.

(b) Es gilt $R = \{ (1,\{2\}), (1,\{1,2\}) \}$ und $R$ ist keine Funktion.

*Beweis.*

(a) -

(b) (z.z. $R$ ist keine Funktion, d.h. $R$ ist nicht eindeutig oder $R$ ist nicht total)
Wir zeigen, dass $R$ nicht eindeutig ist. (z.z. es gilt nicht: für alle $x \in B$ und $Y, Z \in \mathcal{P}(B)$ folgt aus $xRY$ und $xRZ$, dass $Y = Z$, d.h. es gibt $x \in B$ und $Y, Z \in \mathcal{P}(B)$ mit $xRY$ und $xRZ$ und $Y \neq Z$.)
Setze $x := 1$, $Y := \{2\}$ und $Z := \{1, 2\}$. Dann gilt sowohl $x \in B$ also auch $Y \in \mathcal{P}(B)$ und $Z \in \mathcal{P}(B)$. Dann gilt $1R\{2\}$ und $1R\{1,2\}$ und wegen $1 \notin \{2\}$, dass $\{1,2\} \neq \{2\}$, also $Y \neq Z$.

□

**Präsenzaufgabe 2**

*Voraussetzung:* Seien $A, B$ Mengen und $R, S \subseteq A \times B$.

*Behauptung:* Wenn $S$ eindeutig ist und $R \subseteq S$ gilt, so ist $R$ eindeutig.

*Beweis.* Es gelte, dass $S$ eindeutig ist und $R \subseteq S$ gilt. (z.z. $R$ ist eindeutig, d.h. für alle $x \in A$ und $y, z \in B$ folgt aus $xRy$ und $xRz$, dass $y = z$.)
Seien $x \in A$ und $y, z \in B$. Es gelte $xRy$ und $xRz$. Wegen $R \subseteq S$ gilt dann auch $xSy$ und $xSz$ nach Definition der Inklusion. Aufgrund der Eindeutigkeit von $S$ folgt aus $xSy$ und $xSz$, dass $y = z$. □

**Präsenzaufgabe 3**

*Voraussetzung:* Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, wobei $f(n) = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq n \}$.

*Behauptung:* Es gibt $n \in \mathbb{N}$ so, dass $f(n)$ keine Funktion ist.

*Beweis.* Setze $n := 1$. (z.z. $f(n)$ ist keine Funktion, d.h. $f(n)$ ist nicht eindeutig oder $f(n)$ ist nicht total)
Wir zeigen, dass $f(n)$ nicht eindeutig ist. (z.z. es gilt nicht: für alle $x \in \mathbb{N}$ und $y, z \in \mathbb{N}$ folgt aus $xf(n)y$ und $xf(n)z$, dass $y = z$, d.h. es gibt $x \in \mathbb{N}$ und $y, z \in \mathbb{N}$ mit $xf(n)y$ und $xf(n)z$ und $y \neq z$.)
Setze $x := 0$, $y := 0$ und $z := 1$. Dann gilt $x, y, z \in \mathbb{N}$. Weiter gilt wegen der Setzung von $n$, dass $f(n) = f(1) = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq 1 \}$. Wegen $0+0 = 0 \leq 1$ gilt $xf(n)y$ und wegen $0+1 = 1 \leq 1$ gilt $xf(n)z$. Außerdem ist $0 \neq 1$, also $y \neq z$. □