CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge für Serie 3

Hausaufgabe 1 (3+3 Punkte)
Voraussetzung: Gegeben seien die Menge $X := \{0, 1, 2\}$ und die Relation

$$R := \{ (x, (A, B)) \in X \times (\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)) \mid x \in A \cap B \text{ und } 2 \cdot x \in B \}.$$

Behauptung:

(a) Es gilt: $|X \times (\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X))| = 192$.

(b) Es gilt $(0, (\{0\}, \{0\})) \in R$ und $(1, (\{1\}, \{1, 2\})) \in R$.

Beweis.

(a) Nach Satz 1.3.9 gilt zunächst $|\mathcal{P}(X)| = 2^{|X|} = 2^3 = 8$. Mit Satz 1.4.3 folgt

$$|X \times (\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X))| = |X| \cdot |\mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)| = |X| \cdot (|\mathcal{P}(X)| \cdot |\mathcal{P}(X)|) = 3 \cdot (8 \cdot 8) = 192 .$$

(b) Es gilt $(0, (\{0\}, \{0\})) \in R$, da $0 \in \{0\} = \{0\} \cap \{0\}$ und $2 \cdot 0 = 0 \in \{0\}$. Außerdem ist $(1, (\{1\}, \{1, 2\})) \in R$, da $1 \in \{1\} = \{1\} \cap \{1, 2\}$ und $2 \cdot 1 = 2 \in \{1, 2\}$.

$\square$

Hausaufgabe 2 (4+4 Punkte)
Voraussetzung: Seien A, B Mengen und $R, S \subseteq A \times B$. *Behauptung:*

(a) Sind R und S total, so auch $R \cup S$.

(b) Sind R und S eindeutig, so auch $R \cap S$.

(a) *Beweis.* Es gelte, dass R und S total sind. (z.z. $R \cup S$ ist total, d.h. für alle $x \in A$ existiert ein $y \in B$ mit $x(R \cup S)y$.) Sei $x \in A$. Da R total ist, gibt es ein $b \in B$ mit xRb. Setze nun $y := b$. Dann ist $y \in B$ und wegen xRb und nach Defintion der Vereinigung gilt $x(R \cup S)b$. $\square$

(b) *Beweis.* Es gelte, dass R und S eindeutig sind. (z.z. $R \cap S$ ist eindeutig, d.h. für alle $x \in A$ und $y, z \in B$ folgt aus $x(R \cap S)y$ und $x(R \cap S)z$, dass $y = z$.)
Seien $x \in A$ und $y, z \in B$. Es gelte $x(R \cap S)y$ und $x(R \cap S)z$. Wegen $x(R \cap S)y$ gilt xRy und xSy nach Definition des Schnitts. Wegen $x(R \cap S)z$ gilt xRz und xSz wieder nach Definition des Schnitts. Aufgrund der Eindeutigkeit von R folgt aus xRy und xRz, dass $y = z$. $\square$

Hausaufgabe 3 (4+2 Punkte)
Voraussetzung: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, wobei $f(n) = \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \cdot y \leq n \}$.
Behauptung:

(a) Es gibt $n \in \mathbb{N}$ so, dass $f(n)$ keine Funktion ist.

(b) Es gilt $\bigcap \{ f(n) \mid n \in \mathbb{N} \} = \{ (0, 0) \}$ sowie $\bigcup \{ f(n) \mid n \in \mathbb{N} \} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(a) *Beweis.* Setze $n := 0$. (z.z. $f(n)$ ist keine Funktion, d.h. $f(n)$ ist nicht eindeutig oder nicht total)
Wir zeigen, dass $f(n)$ nicht eindeutig ist. (z.z. es gilt nicht: für alle $x \in \mathbb{N}$ und $y, z \in \mathbb{N}$ folgt aus $xf(n)y$ und $xf(n)z$, dass $y = z$, d.h. es gibt $x \in \mathbb{N}$ und $y, z \in \mathbb{N}$ mit $xf(n)y$ und $xf(n)z$ und $y \neq z$.)
Setze $x := 0$, $y := 0$ und $z := 1$. Dann gilt $x, y, z \in \mathbb{N}$. Weiter gilt wegen der Setzung von n, dass $f(n) = f(0) = \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x \cdot y \leq 0 \,\}$. Wegen $0 \cdot 0 = 0 \leq 1$ gilt $xf(n)y$ und wegen $0 \cdot 1 = 0 \leq 1$ gilt $xf(n)z$. Außerdem ist $0 \neq 1$, also $y \neq z$. $\square$