Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge für Serie 2

Präsenzaufgabe 1

Voraussetzung: Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ nichtleere Mengen von Mengen.
Behauptung: Wenn $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$, so gilt $\bigcap \mathcal{N} \subseteq \bigcap \mathcal{M}$.

Beweis. Es gelte $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$. Sei $x \in \bigcap \mathcal{N}$. (z.z. für alle $Y \in \mathcal{M}$ gilt $x \in Y$)
Sei also $Y \in \mathcal{M}$. Wegen $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{N}$ gilt $Y \in \mathcal{N}$. Da $Y \in \mathcal{N}$ und $x \in \bigcap \mathcal{N}$, gilt $x \in Y$ nach der Definition von $\bigcap$. □

Präsenzaufgabe 2

Voraussetzung: Gegeben sei die Menge $M := \{ x \in \mathbb{N} \mid x \leq 4 \text{ und } x^2 = 2x \}$.
Behauptung: Es gilt $\mathcal{P}(M) := \{ \emptyset, \{ 0 \}, \{ 2 \}, M \}$.

Präsenzaufgabe 3

Voraussetzung: -
Behauptung:

(a) Für alle Mengen A, B und C gilt $A \subseteq B \cap C$ genau dann, wenn $A \subseteq B$ und $A \subseteq C$.
(b) Zeigen Sie: Für alle Mengen A und B gilt $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

(a) *Beweis.* Seien A, B und C Mengen.
Es gelte $A \subseteq B \cap C$. (z.z. $A \subseteq B$ und $A \subseteq C$)
Sei $x \in A$. Wegen $A \subseteq B \cap C$ gilt dann $x \in B \cap C$, also nach Definition vom Schnitt, dass $x \in B$ und $x \in C$.
Es gelte nun $A \subseteq B$ und $A \subseteq C$. (z.z. $A \subseteq B \cap C$)
Sei $x \in A$. Wegen $A \subseteq B$ und $A \subseteq C$ gilt dann $x \in B$ und $x \in C$. Also nach der Definition des Schnittes $x \in A \cap B$. □

(b) *Beweis.* Seien A und B Mengen. (z.z. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$, also $\mathcal{P}(A \cap B) \subseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ und $\mathcal{P}(A \cap B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$)
"$\subseteq$": Sei $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Dann ist $X \subseteq A \cap B$ nach Definition der Potenzmenge. Nach Aufgabenteil (a) gilt dann $X \subseteq A$ und $X \subseteq B$, also $X \in \mathcal{P}(A)$ und $X \in \mathcal{P}(B)$ nach Definition der Potenzmenge. Nach der Definition des Schnittes folgt $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.
"$\supseteq$": Sei $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Nach der Definition des Schnittes folgt $X \in \mathcal{P}(A)$ und $X \in \mathcal{P}(B)$, also $X \subseteq A$ und $X \subseteq B$ nach Definition der Potenzmenge. Nach Aufgabenteil (a) gilt dann $X \subseteq A \cap B$. Nach Definition der Potenzmenge folgt $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$. □