CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge für Serie 2

Hausaufgabe 1 (3+6 Punkte)

(a) *Voraussetzung:* -
Behauptung: Für alle Mengen A, B und C folgt aus $A \subseteq C$ und $B \subseteq C$, dass $A \cup B \subseteq C$.

Beweis. Seien A, B und C Mengen. Es gelte $A \subseteq C$ und $B \subseteq C$. (z.z. $A \cup B \subseteq C$)
Sei $x \in A \cup B$. Dann ist $x \in A$ oder $x \in B$ nach Definition der Vereinigung.
1. Fall: $x \in A$. Dann ist auch $x \in C$, da $A \subseteq C$.
2. Fall: $x \in B$. Dann ist auch $x \in C$, da $B \subseteq C$. □

(b) *Voraussetzung:* Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ nichtleere Mengen von Mengen und es gelte $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \neq \emptyset$.
Behauptung: Es gilt:$(\bigcap \mathcal{M}) \cup (\bigcap \mathcal{N}) \subseteq \bigcap(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$.

Beweis. Nach Satz 1.2.4 (4) gilt sowohl $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{M}$ als auch $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{N}$. Mit Präsenzaufgabe 1 gelten dann $\bigcap \mathcal{M} \subseteq \bigcap(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$ und $\bigcap \mathcal{N} \subseteq \bigcap(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$. Mit dem ersten Aufgabenteil folgt daraus, dass $(\bigcap \mathcal{M}) \cup (\bigcap \mathcal{N}) \subseteq \bigcap(\mathcal{M} \cap \mathcal{N})$. □

Hausaufgabe 2 (5+4+2 Punkte)

Voraussetzung: -
Behauptung:

(a) Für alle Mengen A und B folgt aus $A \subseteq B$, dass $\mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ gilt.
(b) Für alle Mengen A und B gilt $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$.
(c) Es gibt Mengen A und B so, dass $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ gilt.

(a) *Beweis.* Seien A und B Mengen. Es gelte $A \subseteq B$.
Sei $X \in \mathcal{P}(A)$. (z.z. $X \in \mathcal{P}(B)$)
Dann ist $X \subseteq A$ nach Definition der Potenzmenge und $A \subseteq B$ nach Voraussetzung. Nach 1.1.11 (3) folgt $X \subseteq B$, also $X \in \mathcal{P}(B)$ nach Definition der Potenzmenge. □

(b) *Beweis.* Sei $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.
1. Fall: $X \in \mathcal{P}(A)$.
Dann ist $X \subseteq A$ nach Definition der Potenzmenge. Nach Satz 1.2.4. (4) gilt $A \subseteq A \cup B$. Mit Satz 1.1.11. (3) folgt, dass $X \subseteq A \cup B$. Nach der Definition der Potenzmenge folgt $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$.
2. Fall: $X \in \mathcal{P}(B)$.
Dann ist $X \subseteq B$ nach Definition der Potenzmenge. Nach Satz 1.2.4. (4) gilt $B \subseteq A \cup B$. Mit Satz 1.1.11. (3) folgt, dass $X \subseteq A \cup B$. Nach der Definition der Potenzmenge folgt $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$. □

(c) *Beweis.* Setze $A := \{1\}$ und $B := \{2\}$. Dann ist $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}\}$ und $\mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{2\}\}$, also $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}$, aber $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(\{1, 2\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$. Wegen $\{1, 2\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ gilt also $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \nsubseteq \mathcal{P}(A \cup B)$ nach Definition der Inklusion, also $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \mathcal{P}(A \cup B)$ nach Definition der Gleichheit von Mengen. □