CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 11

Hausaufgabe 1 ($3 + 2$ Punkte)
Voraussetzung: Wir betrachten die geordnete Menge $(\mathbb{N}, |)$ und die Menge $A := \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
Behauptung:

(a) $2, 3, 5, 7$ sind minimale Elemente, $4, 5, 6, 7$ maximale Elemente von A. Es gibt weder größtes noch kleinstes Element in A.
(b) Es gilt $\mathbb{N}^{\triangle} = \{0\}$ und $A^{\triangledown} = \{1\}$.

Hausaufgabe 2 (7 Punkte)
Voraussetzung: Sei M eine Menge und die Relation $\trianglelefteq$ auf der Menge M^* für alle $s, t \in M^*$ wie folgt definiert:

$$s \trianglelefteq t \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, u \in M^* : s \,\&\, u = t\,.$$

Behauptung: $\trianglelefteq$ ist eine Ordnungsrelation.

Beweis. Seien $r, s, t \in M^*$.
Refl.: Setze $u := ()$. Dann gilt, da $()$ neutrales Element ist, $r \,\&\, () = r$. Also gilt nach Definition von $\trianglelefteq$, dass $r \trianglelefteq r$.
Antisymm.: Es gelte $r \trianglelefteq s$ und $s \trianglelefteq r$. D.h., es gibt $u, u' \in M^*$ mit $r \,\&\, u = s$ und $s \,\&\, u' = r$ nach Definition von $\trianglelefteq$. Damit ist $(r \,\&\, u) \,\&\, u' = r$ und aufgrund der Assoziativität von $\&$ gilt $r \,\&\, (u \,\&\, u') = r$. Mit dem Hinweis (1) gilt somit $u' \,\&\, u = ()$. Mit dem Hinweis (2) folgt $u = ()$ und $u' = ()$. Wegen $r \,\&\, u = s$ und Hinweis (1) folgt $r = s$.
Trans.: Es gelte $r \trianglelefteq s$ und $s \trianglelefteq t$. D.h., es gibt $u, u' \in M^*$ mit $r \,\&\, u = s$ und $s \,\&\, u' = t$ nach Definition von $\trianglelefteq$. Weiter gilt damit $(r \,\&\, u) \,\&\, u' = t$, also wieder aufgrund der Assoziativität von $\&$ auch $r \,\&\, (u \,\&\, u') = t$. Es gibt also ein $v \in M^*$, nämlich $v := u \,\&\, u'$, mit $r \,\&\, v = t$. Also gilt $r \trianglelefteq t$. □

Hausaufgabe 3 (5+3 Punkte)
Voraussetzung: Es seien $(M_1, \sqsubseteq_1)$ und $(M_2, \sqsubseteq_2)$ geordenete Mengen. Wir definieren auf dem direkten Produkt $M_1 \times M_2$ eine Relation $\sqsubseteq$, indem wir für alle $(a, b) \in M_1 \times M_2$ und $(c, d) \in M_1 \times M_2$ festlegen:

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \;:\Longleftrightarrow\; a \sqsubseteq_1 c \wedge b \sqsubseteq_2 d.$$

Behauptung:

(a) $\sqsubseteq$ ist eine Ordnungsrelation.
(b) Ist x das kleinste Element von M_1 in $(M_1, \sqsubseteq_1)$ und ist y das kleinste Element von M_2 in $(M_2, \sqsubseteq_2)$, so ist (x, y) das kleinste Element von $M_1 \times M_2$ in $(M_1 \times M_2, \sqsubseteq)$.

(a) *Beweis. Refl.:* Sei $(a, b) \in M_1 \times M_2$. Dann gilt $a \sqsubseteq_1 a$ und $b \sqsubseteq_2 b$, weil $\sqsubseteq_1, \sqsubseteq_2$ reflexiv sind. Also gilt $(a, b) \sqsubseteq (a, b)$.
Antisymm.: Seien $(a, b), (c, d) \in M_1 \times M_2$ mit $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ und $(c, d) \sqsubseteq (a, b)$. Dann gelten $a \sqsubseteq_1 c$ und $b \sqsubseteq_2 d$, sowie $c \sqsubseteq_1 a$ und $d \sqsubseteq_2 b$. Wegen $a \sqsubseteq_1 c$ und $c \sqsubseteq_1 a$ liefert die Antisymmetrie von $\sqsubseteq_1$ bereits $a = c$ und analog liefern $b \sqsubseteq_2 d$ und $d \sqsubseteq_2 b$, dass $b = d$ gilt. Also gilt $(a, b) = (c, d)$.
Trans.: Seien $(a, b), (c, d), (e, f) \in M_1 \times M_2$ mit $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ und $(c, d) \sqsubseteq (e, f)$. Dann gelten $a \sqsubseteq_1 c$ und $b \sqsubseteq_2 d$, sowie $c \sqsubseteq_1 e$ und $d \sqsubseteq_2 f$. Wegen $a \sqsubseteq_1 c$ und $c \sqsubseteq_1 e$ liefert die Transitivität von $\sqsubseteq_1$, dass $a \sqsubseteq_1 e$ gilt und analog, dass $b \sqsubseteq_2 f$ gilt. Also gilt $(a, b) \sqsubseteq (e, f)$. □

(b) *Beweis.* Es sei x kleinstes Element von M_1 in $(M_1, \sqsubseteq_1)$ und y kleinstes Element von M_2 in $(M_2, \sqsubseteq_2)$. Sei $(a, b) \in M_1 \times M_2$. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(x, y) \sqsubseteq (a, b) &\iff x \sqsubseteq_1 a \land y \sqsubseteq_2 b && \text{Definition } \sqsubseteq \\
&\iff \textbf{wahr} \land y \sqsubseteq_2 b && x \text{ kl. Element von } \sqsubseteq_1 \\
&\iff \textbf{wahr} \land \textbf{wahr} && y \text{ kl. Element von } \sqsubseteq_2 \\
&\iff \textbf{wahr}
\end{aligned}
$$

Somit ist (x, y) kleinstes Element von $M_1 \times M_2$. $\square$