CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 10

Präsenzaufgabe 1

Voraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ und die Relation $\equiv$ auf der Menge $\{0,1\}^n$ für alle $s,t \in \{0,1\}^n$ definiert durch

$$s \equiv t \;:\Longleftrightarrow\; s_1 = t_1.$$

Behauptung:

(a) $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.

(b) Es gelten die Gleichheiten

$$[(0,0,0)]_\equiv = \{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}$$
$$[(1,0,0)]_\equiv = \{(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}$$
$$\{0,1\}^3 / \equiv = \{[(0,0,0)]_\equiv, [(1,0,0)]_\equiv\}$$

(c) Es gilt $|[s]_\equiv| = 2^{n-1}$ für alle $s \in \{0,1\}^n$ und es gilt $|\{0,1\}^n / \equiv| = 2$.

Beweis. (a) *Reflexiv*: Sei $s \in \{0,1\}^n$, dann gilt $s_1 = s_1$ aufgrund der Reflexivität der identischen Relation $\mathbf{I}_{\{0,1\}}$. Also folgt mit der Definition von $\equiv$ auch $s \equiv s$.

Symmetrisch: Seien $s,t \in \{0,1\}^n$ mit $s \equiv t$. Nach Definition von $\equiv$ gilt dann $s_1 = t_1$ und aufgrund der Symmetrie der identischen Relation $\mathbf{I}_{\{0,1\}}$ auch $t_1 = s_1$. Wieder nach Definition von $\equiv$ folgt $t \equiv s$.

Transitiv: Seien $s,t,u \in \{0,1\}^n$ mit $s \equiv t$ und $t \equiv u$. Nach Definition von $\equiv$ gelten dann $s_1 = t_1$ und $t_1 = u_1$. Die Transitivität der identischen Relation $\mathbf{I}_{\{0,1\}}$ liefert $s_1 = u_1$ und damit gilt nach Definition von $\equiv$ auch $s \equiv u$.

Die Relation $\equiv$ ist also eine Äquivalenzrelation.

(b) -

Bei der Angabe der Äquivalenzklassen kann auch jeder andere Klassenvertreter verwendet werden. Es gilt also auch:

$$\{0,1\}^3 / \equiv = \{[(0,1,0)]_\equiv, [(1,0,1)]_\equiv\} = \{[(0,0,1)]_\equiv, [(1,1,1)]_\equiv\}$$
$$= \{[(0,1,1)]_\equiv, [(1,1,0)]_\equiv\} = \ldots$$

Es wäre außerdem in Ordnung, wenn auch die Äquivalenzklassen ezplizit angegeben werden, d.h.,

$$\{0,1\}^3 / \equiv = \{\{(0,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}, \{(1,0,0),(1,1,0),(1,0,1),(1,1,1)\}\}.$$

$\square$

Präsenzaufgabe 2

Behauptung:

(a) Es gilt: (1) $15 \equiv_2 6 \Longleftrightarrow$ **falsch** (2) $19 \equiv_7 5 \Longleftrightarrow$ **wahr** (3) $2 \equiv_3 -8 \Longleftrightarrow$ **falsch** .

(b) Seien $k,l \in \mathbb{Z}$. Dann gilt: Aus $k \mid l$ folgt die Inklusion $\equiv_l \subseteq \equiv_k$.

(a) *Beweis.*

(1) Es gilt $2 \nmid 9 = 15 - 6$. Also gilt nach der Definition der Modulo-Relation nicht $15 \equiv_2 6$.
(2) Es gilt $7 \mid 14 = 19 - 5$. Also gilt nach der Definition der Modulo-Relation $19 \equiv_7 5$.
(3) Es gilt $3 \nmid 10 = 2 - (-8)$. Also gilt nach der Definition der Modulo-Relation nicht $2 \equiv_3 -8$.

□

(b) *Beweis.* "$\Longrightarrow$": Es gelte $k \mid l$. Seien $x, y \in \mathbb{Z}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \equiv_l &\iff x \equiv_l y && \text{Infixnotation}\\
&\iff l \mid x - y && \text{Eigenschaft von } \equiv_l\\
&\iff k \mid l \ \wedge \ l \mid x - y && \text{es gilt } k \mid l\\
&\implies k \mid x - y && \text{Transitivität von } \mid\\
&\iff x \equiv_k y && \text{Eigenschaft von } \equiv_k\\
&\iff (x,y) \in \equiv_k . && \text{Infixnotation}
\end{aligned}$$

□