CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut
für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18 Abgabe: 8.1.2018

Serie 8

Präsenzaufgabe 1
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ die Gleichung $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ gilt.

Präsenzaufgabe 2 (Klausuraufgabe im WS 2015/16)
Sei $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$ definiert durch

$$f\,(()) := 1\,, \qquad\qquad f(a : s) := a \cdot f(s) \text{ für alle } a \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{N}^*\,.$$

Zeigen Sie durch Listeninduktion, dass für alle $s, t \in \mathbb{N}^*$ gilt $f(s \,\&\, t) = f(s) \cdot f(t)$.

Präsenzaufgabe 3
Gegeben seien die zwei Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, wobei $f(x) = 2x + 1$, und $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, wobei $g(n) = \{\, x \in \mathbb{N} \mid x \leq n \,\}$. Überprüfen Sie f und g auf Injektivität und Surjektivität. Begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Hausaufgabe 4 (6 Punkte)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R} \setminus \{\, 1 \,\}$ die folgende Gleichheit gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

Hausaufgabe 5 ($2 + 7$ Punkte, Klausuraufgabe im WS 2014/15)
Sei M eine Menge. Wir definieren die Funktion $\mathsf{menge} : M^* \to \mathcal{P}(M)$ durch

$$\mathsf{menge}(()) = \emptyset, \qquad\qquad \mathsf{menge}(a : s) = \{\, a \,\} \cup \mathsf{menge}(s) \text{ für alle } a \in M \text{ und } s \in M^*\,.$$

(a) Geben Sie $\mathsf{menge}(2 : 1 : 2 : ())$ explizit an. Eine Begründung ist nicht verlangt.

(b) Zeigen Sie durch Listeninduktion, dass für alle $s, t \in M^*$ gilt:

$$\mathsf{menge}(s \,\&\, t) = \mathsf{menge}(s) \cup \mathsf{menge}(t)$$

Hausaufgabe 6 (3+4+3 Punkte, Klausuraufgabe im WS 2015/16)
Sei M eine nichtleere Menge. Wir betrachten die Funktion $\mathsf{kopf} : M^+ \to M$.

(a) Zeigen Sie, dass kopf surjektiv ist.
(b) Geben Sie mit Beweis zwei verschiedende Rechtsinverse von kopf an.
(c) Zeigen Sie, dass kopf nicht injektiv ist.