CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik
R. Berghammer

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 7

Hausaufgabe 1 (6 Punkte)
Voraussetzung: Seien X eine Menge und $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ mit der Eigenschaft: $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(X) : A \subseteq B \Rightarrow f(B) \subseteq f(A)$. Wir definieren $g : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, wobei $g(T) = \overline{f(T)}$. Das Komplement wird hier bezüglich X gebildet.
Behauptung: g besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. Wir benutzen den Satz von Knaster. Dazu müssen wir zeigen, dass g monoton ist. Seien also $A, B \in \mathcal{P}(X)$. Es gelte $A \subseteq B$. Also ist $f(B) \subseteq f(A)$ nach der Voraussetzung an f. Mit dem Hinweis gilt dann $\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(B)}$. Daraus und aus der Definition von g folgt:

$$g(A) = \overline{f(A)} \subseteq \overline{f(B)} = g(B).$$

Also ist g monoton und die Aussage folgt aus dem Satz von Knaster. □

Hausaufgabe 2 (6 Punkte)
Voraussetzung: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N} \times \mathbb{N})$, wobei $f(n) = \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq n \,\}$.
Behauptung: Es gilt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \subseteq \bigcup \{\, f(n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$.

Beweis. (durch Widerspruch) Angenommen es gilt $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \not\subseteq \bigcup \{\, f(n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Nach der Definition der Inklusion gibt es dann ein x mit $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $x \notin \bigcup \{\, f(n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$. Wegen $x \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ gibt es $a, b \in \mathbb{N}$ mit $x = (a, b)$. Da $x \notin \bigcup \{\, f(n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$, gilt nach Definition von $\bigcup$, dass für alle $X \in \{\, f(n) \mid n \in \mathbb{N} \,\}$ gilt, dass $x \notin X$. Also gilt $x \notin f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $a, b \in \mathbb{N}$, gilt auch $a + b \in \mathbb{N}$. Also gilt auch $(a, b) = x \notin f(a + b)$. Nach Defintion von f gilt also, dass $a + b \not\leq a + b$, also $a + b > a + b$, also $0 > 0$. Die ist ein Widerspruch. □

Hausaufgabe 3 (8 Punkte)
Voraussetzung: Sei $n \in \mathbb{N}$.
Behauptung: Ist n^3 gerade, so ist auch n gerade.

Beweis. (durch indirekten Beweis) (z.z. es gilt: $\neg(2|n) \Longrightarrow \neg(2|n^3)$.)
Es gelte also $\neg(2|n)$. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $n = 2x + 1$. Wir erhalten:

$$n^3 = (2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2(4x^3 + 6x^2 + 3x) + 1.$$

Es gibt also ein $y \in \mathbb{N}$ mit $n^3 = 2y + 1$, nämlich $y := 4x^3 + 6x^2 + 3x$, also gilt $\neg(2|n^3)$. □

Beweis. (durch Widerspruch)
Es gelte, dass n^3 gerade ist. Angenommen n ist ungerade. Dann gibt es ein $x \in \mathbb{N}$ mit $n = 2x + 1$. Wir erhalten:

$$n^3 = (2x + 1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = 2(4x^3 + 6x^2 + 3x) + 1.$$

Es gibt also ein $y \in \mathbb{N}$ mit $n^3 = 2y + 1$, nämlich $y := 4x^3 + 6x^2 + 3x$, also gilt, dass n^3 ungerade ist. Das ist ein Widerspruch. □