Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Institut für Informatik
R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 7

Präsenzaufgabe 1

Voraussetzung: Gegeben sei eine Menge M und $X \subseteq M$. Wir definieren die Funktion $f : \mathcal{P}(M) \to \mathcal{P}(M)$ durch $f(A) = A \setminus X$.
Behauptung: f besitzt einen Fixpunkt.

Beweis. (durch Angabe eines konkreten Elements)
Nach der Definition der Potenzmenge gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$. Weiter gilt nach der Definition von f und der Differenz von Mengen:

$$f(\emptyset) = \emptyset \setminus X = \emptyset.$$

Nach Definition ist $\emptyset$ somit ein Fixpunkt von f. □

Beweis. (durch Verwendung des Fixpunktsatzes von Knaster-Tarski)
Seien $A, B \in \mathcal{P}(X)$ und es gelte $A \subseteq B$. Wir zeigen zunächst, dass $A \setminus X \subseteq B \setminus X$. Sei dazu $x \in A \setminus X$. Nach der Definition von der Differenz von Mengen gilt also $x \in A$ und $x \notin X$. Wegen $A \subseteq B$ folgt daraus $x \in B$ und $x \notin X$, also nach der Definition von der Differenz von Mengen $x \in B \setminus X$. Also gilt $A \setminus X \subseteq B \setminus X$. Weiter ist:

$$f(A) \overset{\text{Def. } f}{=} A \setminus X \overset{\text{s. oben}}{\subseteq} B \setminus X \overset{\text{Def. } f}{=} f(B).$$

Also ist f monoton. Nach dem Fixpunktsatz von Knaster-Tarski existiert damit ein Fixpunkt von f. □

Bei der Hausaufgabe 4 kann man keinen Fixpunkt, wie hier, direkt angeben. Daher muss dort die zweite Variante verwendet werden.

Präsenzaufgabe 2

Voraussetzung: Seien A, B Mengen und $R, S \subseteq A \times B$.
Behauptung: Sind R oder S eindeutig, so ist auch $R \cap S$

Beweis. (durch indirekten Beweis) (z.z. Wenn $R \cap S$ nicht eindeutig ist, so sind R und S nicht eindeutig.)
Es gelte, dass $R \cap S$ nicht eindeutig ist. Also gibt es nach der Definition der Eindeutigkeit $x \in A$ und $y, z \in B$ so, dass $(x, y) \in R \cap S$ und $(x, z) \in R \cap S$ und $y \neq z$. Wegen $(x, y) \in R \cap S$ und $(x, z) \in R \cap S$ gilt nach der Definition des Schnitts sowohl $(x, y) \in R$ und $(x, z) \in R$ als auch $(x, y) \in S$ und $(x, z) \in S$. Wegen $y \neq z$ sind nach der Definition der Eindeutigkeit weder R noch S eindeutig. □

Präsenzaufgabe 3

Voraussetzung: Gegeben sei eine Menge M.
Behauptung: Es gilt $\bigcap \mathcal{P}(M) = \emptyset$.
Beweis. (durch Widerspruchsbeweis) Angenommen es gilt $\bigcap \mathcal{P}(M) \neq \emptyset$.
Dann existiert ein x mit $x \in \bigcap \mathcal{P}(M)$. Nach der Definition von $\bigcap$ gilt also $x \in X$ für alle $X \in \mathcal{P}(M)$. Nach der Definition der Potenzmenge gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$. Damit ist auch $x \in \emptyset$. Dies ist ein Widerspruch zur Definition der leeren Menge. □