CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge für Serie 6

Präsenzaufgabe 1

Voraussetzung: Sei Ω die Menge aller möglichen Ergebnisse eines 3-fachen Münzwurfs mit einer zweiseitigen Münze. Gegeben seien außerdem die folgenden Ereignisse:

A: Alle Würfe liefern das gleiche Ergebnis.

B: Es wird höchstens einmal "Kopf" gewürfelt.

C: Es wird genau einmal "Zahl" gewürfelt.

D: Es wird nicht zweimal hintereinander "Zahl" gewürfelt.

Mit 0 bezeichnen wir im Folgenden "Kopf" und mit 1 "Zahl".

Behauptung:

(a) Es gilt $\Omega = \{ 0, 1 \}^3$ und $|\Omega| = 8$.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned}
A &= \{ (1,1,1), (0,0,0) \} \\
B &= \{ (1,1,1), (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0) \} \\
C &= \{ (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) \} \\
D &= \{ (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,0,1) \}
\end{aligned}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
A &= \{ \omega \in \Omega \mid \omega_1 = \omega_2 = \omega_3 \} \\
&\quad (= \{ \omega \in \Omega \mid \forall\, i, j \in \{ 1,2,3 \} : \omega_i = \omega_j \} \\
&\quad = \{ \omega \in \Omega \mid \forall\, i, j \in \mathbb{N} : 1 \le i, j \le 3 \Rightarrow \omega_i = \omega_j \}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B &= \{ \omega \in \Omega \mid (\omega_1 = \omega_2 = 1) \vee (\omega_2 = \omega_3 = 1) \vee (\omega_1 = \omega_3 = 1) \vee (\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1) \} \\
&\quad (= \{ \omega \in \Omega \mid (\exists\, i \in \{ 1,2,3 \} : \omega_i = 0 \wedge \forall\, j \in \{ 1,2,3 \} \setminus \{ i \} : \omega_j = 1) \\
&\qquad\qquad \vee (\forall\, i \in \{ 1,2,3 \} : \omega_i = 1) \} \\
&\quad = \{ \omega \in \Omega \mid \forall\, i \in \{ 1,2,3 \} : \omega_i = 0 \Rightarrow \forall\, j \in \{ 1,2,3 \} \setminus \{ i \} : \omega_j = 1 \}),
\end{aligned}$$

$$C = \{ \omega \in \Omega \mid \exists\, i \in \{ 1,2,3 \} : \omega_i = 1 \wedge \forall\, j \in \{ 1,2,3 \} \setminus \{ i \} : \omega_j = 0 \},$$

$$D = \{ \omega \in \Omega \mid \forall\, i \in \{ 1,2 \} : \omega_i = 1 \Rightarrow \omega_{i+1} = 0 \}.$$

(d) Sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Es ist $\Omega = \{ 0, 1 \}^n$ und $|\Omega| = 2^n$. Weiter ist

$$A = \{ \omega \in \Omega \mid \forall i, j \in \mathbb{N} : 1 \leq i, j \leq n \Rightarrow \omega_i = \omega_j \},$$

$$B = \{ \omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \wedge \omega_i = 0 \Rightarrow \forall j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n \wedge j \neq i \Rightarrow \omega_j = 1 \},$$

$$C = \{ \omega \in \Omega \,|\, \exists i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n \wedge \omega_i = 1 \wedge \forall j \in \mathbb{N} : 1 \leq j \leq n \wedge j \neq i \Rightarrow \omega_j = 0\},$$

$$D = \{ \omega \in \Omega \,|\, \forall i \in \mathbb{N} : 1 \leq i \leq n-1 \Rightarrow \omega_i = 1 \Rightarrow \omega_{i+1} = 0\}.$$

Bei dieser Aufgabe geht es um direkte Produkte und deren Kardinalitäten. Als Motivation bei dieser Aufgabe können auch gerne die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse bestimmt werden. Dazu definieren wir das Wahrscheinlichkeitsmaß:

$$P : \mathcal{P}(\Omega) \to \{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1 \}, \quad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$$

und nennen $P(E)$ die *Wahrscheinlichkeit des Ereignisses* E für alle $E \in \mathcal{P}(\Omega)$.

Präsenzaufgabe 2

Voraussetzung: Für alle $s, t \in \mathbb{N}^+$ definieren wir $s \trianglelefteq t :\Longleftrightarrow (\mathsf{kopf}(s)) = \mathsf{rest}(t)$.

Behauptung:

(a) $\trianglelefteq$ ist total.

(b) $\trianglelefteq$ ist nicht eindeutig.

Beweis.

(a) (z.z. $\forall\, s \in \mathbb{N}^+ : \exists\, t \in \mathbb{N}^+ : s \trianglelefteq t \Longleftrightarrow$ **wahr**)
Sei $s \in \mathbb{N}^+$. Setze $t := 0 : (\mathsf{kopf}(s))$. Da $0 \in \mathbb{N}$ und $(\mathsf{kopf}(s)) \in \mathbb{N}^*$, gilt $t \in \mathbb{N}^+$ nach der Definition von Listen. Nach Definition von rest ist $\mathsf{rest}(t) = (\mathsf{kopf}(s))$. Also gilt $s \trianglelefteq t$ nach Definition von $\trianglelefteq$.

(b) (z.z. $\exists\, s \in \mathbb{N}^+ : \exists\, t, u \in \mathbb{N}^+ : s \trianglelefteq t \wedge s \trianglelefteq u \wedge t \neq u \Longleftrightarrow$ **wahr**)
Setze $s := 0 : ()$. Setze weiter $t := 0 : (0)$ und $u := 1 : (0)$. Da $0, 1 \in \mathbb{N}$ und $(0) \in \mathbb{N}^*$, gilt $s, t, u \in \mathbb{N}^+$ nach der Definition von Listen. Nach der Definition der Gleichheit von Listen gilt $t \neq u$, da $0 \neq 1$. Weiter gilt $\mathsf{kopf}(s) = 0$ nach Definition von kopf, also $(\mathsf{kopf}(s)) = (0)$. Nach Definition von rest gilt $\mathsf{rest}(t) = (0)$ und $\mathsf{rest}(u) = (0)$, also $s \trianglelefteq t$ und $s \trianglelefteq u$ nach Definition von $\trianglelefteq$.

$\square$