CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge für Serie 5

Hausaufgabe 1 (8 Punkte)

Voraussetzung: Gegeben seien Mengen A und B und eine Relation $R \subseteq A \times B$.

Behauptung: Wir haben folgende prädikatenlogische Formeln und deren Negationen:

(a) $\forall\, x : x \in A \Leftrightarrow x \in B$
$(\exists\, x : x \in A \wedge x \notin B) \vee (\exists\, x : x \in B \wedge x \notin A)$

(b) $\forall\, x : x \notin A \cap B$
$\exists\, x : x \in A \cap B$

(c) $\exists\, x \in R : \forall\, y \in R : x = y$
$\forall\, x \in R : \exists\, y \in R : x \neq y$

(d) $\exists\, x \in R : \exists\, y \in R : x \neq y$
$\forall\, x \in R : \forall\, y \in R : x = y$

Hausaufgabe 2 (6 Punkte)

Voraussetzung: Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N}\times\mathbb{N})$, wobei $f(n) = \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq n \,\}$.

Behauptung: Es gilt:

(a) $\exists\, n \in \mathbb{N} : \forall\, m \in \mathbb{N} : f(n) \subseteq f(m) \iff$ **wahr**

(b) $\forall\, n, m \in \mathbb{N} : n \leq m \Rightarrow f(n) \subseteq f(m) \iff$ **wahr**

(a) *Beweis.* Setze $n := 0$. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $f(0) = \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq 0 \,\} = \{\, (0, 0) \,\}$. Da $0 + 0 = 0 \leq m$, ist $(0, 0) \in f(m)$ nach Definition von f. Also ist $f(n) \subseteq f(m)$. □

(b) *Beweis.* Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Es gelte $n \leq m$. Sei $(x, y) \in f(n)$. Dann gilt $x + y \leq n$ nach Definition von f. Wegen $n \leq m$ gilt weiter $x + y \leq m$, also $(x, y) \in f(m)$ nach Definition von f. □

Hausaufgabe 3 (6 Punkte)

Voraussetzung: Seien $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ nichtleere Mengen von Mengen.

Behauptung: Es gilt: $\bigcap(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) \subseteq (\bigcup \mathcal{M}) \cap (\bigcup \mathcal{N})$.

Beweis. Es sei x ein Objekt. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
x \in \bigcap(\mathcal{M} \cup \mathcal{N}) &\iff \forall X \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N} : x \in X && \text{Def. von } \bigcap \\
&\iff \forall X : X \in \mathcal{M} \cup \mathcal{N} \Rightarrow x \in X && \text{Festl. 2.1.1} \\
&\iff \forall X : (X \in \mathcal{M} \vee X \in \mathcal{N}) \Rightarrow x \in X && \text{Def. von } \cup \\
&\iff \forall X : \neg(X \in \mathcal{M} \vee X \in \mathcal{N}) \vee x \in X && \text{Satz 2.2.7 (3)} \\
&\iff \forall X : (\neg(X \in \mathcal{M}) \wedge \neg(X \in \mathcal{N})) \vee x \in X && \text{de Morgan} \\
&\iff \forall X : (\neg(X \in \mathcal{M}) \vee x \in X) \wedge (\neg(X \in \mathcal{N}) \vee x \in X) && \text{Distr.gesetz} \\
&\iff (\forall X : \neg(X \in \mathcal{M}) \vee x \in X) \wedge (\forall X : \neg(X \in \mathcal{N}) \vee x \in X) && \text{Satz 2.3.7 (4)} \\
&\iff (\forall X : X \in \mathcal{M} \Rightarrow x \in X) \wedge (\forall X : X \in \mathcal{N} \Rightarrow x \in X) && \text{Satz 2.2.7 (3)} \\
&\iff (\forall X \in \mathcal{M} : x \in X) \wedge (\forall X \in \mathcal{N} : x \in X) && \text{Festl. 2.1.1} \\
&\implies (\exists X \in \mathcal{M} : x \in X) \wedge (\exists X \in \mathcal{N} : x \in X) && \text{Zeuge/Spez. } \mathcal{M}, \mathcal{N} \neq \emptyset \\
&\iff x \in \bigcup \mathcal{M} \wedge x \in \bigcup \mathcal{N} && \text{Def. von } \bigcup \\
&\iff x \in \bigcup \mathcal{M} \cap \bigcup \mathcal{N} \,. && \text{Def. von } \cap
\end{aligned}
$$

□