Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Institut für Informatik

R. Berghammer

Mathematatik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge für Serie 4

Hausaufgabe 1 (3+2+3 Punkte)

Voraussetzung: Gegeben seien aussagenlogische Formeln A und B.

Behauptung:

(a) Es gilt $\textbf{wahr} \iff A \Leftrightarrow (B \wedge A) \vee \neg(A \Rightarrow B)$.

(b) Im Allgemeinen gilt nicht, dass $(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \vee A)$ äquivalent zu **wahr** ist.

(c) Es gilt $\textbf{wahr} \iff (A \wedge \neg B) \Rightarrow A$.

(a) *Beweis.* Wir zeigen $A \iff (B \wedge A) \vee \neg(A \Rightarrow B)$:

$$
\begin{aligned}
(B \wedge A) \vee \neg(A \Rightarrow B) &\iff (B \wedge A) \vee (A \wedge \neg B) && \text{Verneinung der Implikation}\\
&\iff (B \wedge A) \vee (\neg B \wedge A) && \wedge \text{ kommutativ}\\
&\iff (B \vee \neg B) \wedge A && \text{Distributivgesetz}\\
&\iff \textbf{wahr} \wedge A && X \vee \neg X \iff \textbf{wahr}\\
&\iff A && X \wedge \textbf{wahr} \iff X
\end{aligned}
$$

□

(b) *Beweis.* Wir haben die folgende Wahrheitstafel:

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B \vee A$	$(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \vee A)$
W	W	W	W	W
W	F	F	W	W
F	W	W	F	F
F	F	W	W	W

Die letzte Spalte zeigt, dass es Belegungen von A und B gibt, sodass die Formel nicht logisch äquivalent zu **wahr** ist. □

(c) *Beweis.* Es gilt

$$
\begin{aligned}
(A \wedge \neg B) \Rightarrow A &\iff \neg(A \wedge \neg B) \vee A && \text{Eigenschaft der Implikation}\\
&\iff (\neg A \vee \neg\neg B) \vee A && \text{de Morgan}\\
&\iff (\neg A \vee B) \vee A && \text{doppelte Negation}\\
&\iff (\neg A \vee A) \vee B && \text{Kommutativität und Assoziativität}\\
&\iff \textbf{wahr} \vee B && \neg X \vee X \iff \textbf{wahr}\\
&\iff \textbf{wahr} && X \vee \textbf{wahr} \iff \textbf{wahr}
\end{aligned}
$$

□

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Voraussetzung: -

Behauptung: Für alle Mengen A und B gilt $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Beweis. Seien A und B Mengen. Es sei X ein Objekt. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
X \in \mathcal{P}(A \cap B) \quad &\iff \quad X \subseteq A \cap B && \text{Def. der Potenzmenge}\\
&\iff \quad X \subseteq A \wedge X \subseteq B && \text{Serie 2, Aufgabe 3a}\\
&\iff \quad X \in \mathcal{P}(A) \wedge X \in \mathcal{P}(B) && \text{Def. der Potenzmenge}\\
&\iff \quad X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) && \text{Def. des Schnitts}
\end{aligned}$$

□

Hausaufgabe 3 (7 Punkte)

Voraussetzung: Gegeben seien eine Menge X und die Funktionen $f, g : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$, wobei

$$f(M, N) = (M \cup N) \setminus (M \cap N) \qquad \text{und} \qquad g(M, N) = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$$

Behauptung: Dann gilt $f = g$.

Beweis. Nach Satz 1.4.11 genügt es, zu zeigen, dass $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ gilt. Sei $x \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$. Dann gibt es $M, N \in \mathcal{P}(X)$ mit $x = (M, N)$. Zu zeigen ist also, dass $f(M, N) = g(M, N)$, also $(M \cup N) \setminus (M \cap N) = (M \setminus N) \cup (N \setminus M)$ gilt. Dies zeigen wir durch logische Umformungen. Sei dafür $a \in X$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
a \in (M \cup N) \setminus (M \cap N) &\iff a \in M \cup N \wedge a \notin M \cap N && \text{Def. Komplement}\\
&\iff a \in M \cup N \wedge \neg(a \in M \cap N) && \text{Negation von } \in\\
&\iff a \in M \cup N \wedge \neg(a \in M \wedge a \in N) && \text{Def. Schnitt}\\
&\iff a \in M \cup N \wedge (\neg(a \in M) \vee \neg(a \in N)) && \text{De Morgan}\\
&\iff (a \in M \vee a \in N) \wedge (\neg(a \in M) \vee \neg(a \in N)) && \text{Def. Vereinigung}\\
&\iff ((a \in M \vee a \in N) \wedge \neg(a \in M))\\
&\qquad \vee ((a \in M \vee a \in N) \wedge \neg(a \in N)) && \text{Distributivgesetz}\\
&\iff ((a \in M \wedge \neg(a \in M)) \vee (a \in N \wedge \neg(a \in M)))\\
&\qquad \vee ((a \in M \wedge \neg(a \in N)) \vee (a \in N \wedge \neg(a \in N))) && \text{Distributivgesetz}\\
&\iff (\textbf{falsch} \vee (a \in N \wedge \neg(a \in M)))\\
&\qquad \vee ((a \in M \wedge \neg(a \in N)) \vee \textbf{falsch}) && A \wedge \neg A \iff \textbf{falsch}\\
&\iff (a \in N \wedge \neg(a \in M)) \vee (a \in M \wedge \neg(a \in N)) && A \vee \textbf{falsch} \iff A\\
&\iff (a \in M \wedge \neg(a \in N)) \vee (a \in N \wedge \neg(a \in M)) && \text{Kommutativität von } \vee\\
&\iff (a \in M \wedge a \notin N) \vee (a \in N \wedge a \notin M) && \text{Negation von } \in\\
&\iff a \in M \setminus N \vee a \in N \setminus M && \text{Def. Komplement}\\
&\iff a \in (M \setminus N) \cup (N \setminus M) && \text{Def. Vereinigung}
\end{aligned}$$

□