

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 10

Präsenzaufgabe 1

- (a) *Beweis. Refl.:* Sei $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann gilt $a \leq a$ und $b \leq b$, weil \leq reflexiv ist. Also gilt $(a, b) \sqsubseteq (a, b)$.
- Antisymm.:* Seien $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ und $(c, d) \sqsubseteq (a, b)$. Dann gelten $a \leq c$ und $b \leq d$, sowie $c \leq a$ und $d \leq b$. Wegen $a \leq c$ und $c \leq a$ liefert die Antisymmetrie von \leq bereits $a = c$ und analog liefern $b \leq d$ und $d \leq b$, dass $b = d$ gilt. Also gilt $(a, b) = (c, d)$.
- Trans.:* Seien $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ und $(c, d) \sqsubseteq (e, f)$. Dann gelten $a \leq c$ und $b \leq d$, sowie $c \leq e$ und $d \leq f$. Wegen $a \leq c$ und $c \leq e$ liefert die Transitivität von \leq , dass $a \leq e$ gilt und analog, dass $b \leq f$ gilt. Also gilt $(a, b) \sqsubseteq (e, f)$. \square

Man kann das natürlich auch durch logische Umformungen zeigen.

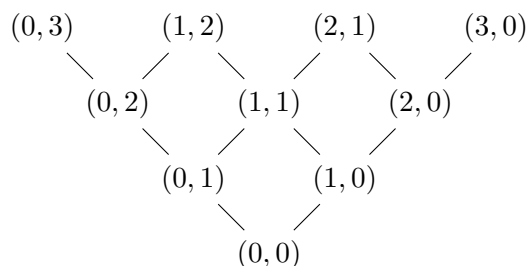
(b) *Beh.:*

- i) Es gibt kein größtes Element und die maximalen Elemente von D sind $(1, 2)$, $(2, 1)$, $(0, 3)$ und $(3, 0)$.
- ii) $(0, 0)$ ist das kleinste Element von D und damit auch das einzige minimale Element.

Ein Beweis war hier nicht verlangt. Wir können aber zunächst

$$D = \{ (0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (3, 0) \}$$

bestimmen. Das Hasse-Diagramm dieser Menge sieht dann wie folgt aus.



Daran lassen sich alle behaupteten Eigenschaften ablesen. Ein Beweis ist das natürlich nicht.

(c) *Beh.:* Es ist \sqsubseteq nicht linear.

Beweis. Da nicht $1 \leq 0$ gilt, gilt weder $(0, 1) \sqsubseteq (1, 0)$, noch $(1, 0) \sqsubseteq (0, 1)$. Also gibt es nicht vergleichbare Elemente und damit ist die Ordnung nicht linear. \square

Präsenzaufgabe 2

Voraussetzung: Seien (M, \sqsubseteq) eine geordnete Menge und $A, B \subseteq M$.

Behauptung: Aus $A \subseteq B$ folgt $B^\Delta \subseteq A^\Delta$ und $B^\nabla \subseteq A^\nabla$.

Beweis. Es gelte $A \subseteq B$.

Sei nun $x \in B^\Delta$. Dann gilt $y \sqsubseteq x$ für alle $y \in B$. Da $A \subseteq B$, gilt auch $z \sqsubseteq x$ für alle $z \in A$. Damit ist x auch obere Schranke von A , also $x \in A^\Delta$.

Sei nun $x \in B^\nabla$. Dann gilt $x \sqsupseteq y$ für alle $y \in B$. Da $A \subseteq B$, gilt auch $x \sqsupseteq z$ für alle $z \in A$. Damit ist x eine untere Schranke von A , also $x \in A^\nabla$.

□

Präsenzaufgabe 3

Voraussetzung: Sei M eine Menge. Wir betrachte die geordnete Menge (M, \mathbf{I}_M) und $A \subseteq M$.

Behauptung:

- (a) Die Mächtigkeit der Menge der maximalen (bzw. minimalen) Elemente von A ist gleich $|A|$.
- (b) Ist $|A| \neq 1$, so gibt es kein größtes oder kleinstes Element in A . Falls aber $|A| = 1$, so gibt es genau ein größtes und ein kleinstes Element in A (und diese sind gleich).