Christian-Albrechts-Universität zu Kiel
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 10

Präsenzaufgabe 1

(a) *Beweis. Refl.:* Sei $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Dann gilt $a \leq a$ und $b \leq b$, weil $\leq$ reflexiv ist. Also gilt $(a,b) \sqsubseteq (a,b)$.
Antisymm.: Seien $(a,b),(c,d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$ und $(c,d) \sqsubseteq (a,b)$. Dann gelten $a \leq c$ und $b \leq d$, sowie $c \leq a$ und $d \leq b$. Wegen $a \leq c$ und $c \leq a$ liefert die Antisymmetrie von $\leq$ bereits $a = c$ und analog liefern $b \leq d$ und $d \leq b$, dass $b = d$ gilt. Also gilt $(a,b) = (c,d)$.
Trans.: Seien $(a,b),(c,d),(e,f) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ mit $(a,b) \sqsubseteq (c,d)$ und $(c,d) \sqsubseteq (e,f)$. Dann gelten $a \leq c$ und $b \leq d$, sowie $c \leq e$ und $d \leq f$. Wegen $a \leq c$ und $c \leq e$ liefert die Transitivität von $\leq$, dass $a \leq e$ gilt und analog, dass $b \leq f$ gilt. Also gilt $(a,b) \sqsubseteq (e,f)$. □

Man kann das natürlich auch durch logische Umformungen zeigen.

(b) *Beh.:*

i) Es gibt kein größtes Element und die maximalen Elemente von D sind $(1,2)$, $(2,1)$, $(0,3)$ und $(3,0)$.

ii) $(0,0)$ ist das kleinste Element von D und damit auch das einzige minimale Element.

Ein Beweis war hier nicht verlangt. Wir können aber zunächst

$$D = \{\, (0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,1),(3,0) \,\}$$

bestimmen. Das Hasse-Diagramm dieser Menge sieht dann wiefolgt aus.

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(0,3) \arrow[dr, dash] & & (1,2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (2,1) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (3,0) \arrow[dl, dash] \\
& (0,2) \arrow[dr, dash] & & (1,1) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & & (2,0) \arrow[dl, dash] & \\
& & (0,1) \arrow[dr, dash] & & (1,0) \arrow[dl, dash] & & \\
& & & (0,0) & & &
\end{tikzcd}$$

Daran lassen sich alle behaupteten Eigenschaften ablesen. Ein Beweis ist das natürlich nicht.

(c) *Beh.:* Es ist $\sqsubseteq$ nicht linear.

Beweis. Da nicht $1 \leq 0$ gilt, gilt weder $(0,1) \sqsubseteq (1,0)$, noch $(1,0) \sqsubseteq (0,1)$. Also gibt es nicht vergleichbare Elemente und damit ist die Ordnung nicht linear. □

Präsenzaufgabe 2

Voraussetzung: Seien $(M, \sqsubseteq)$ eine geordnete Menge und $A, B \subseteq M$.
Behauptung: Aus $A \subseteq B$ folgt $B^{\triangle} \subseteq A^{\triangle}$ und $B^{\triangledown} \subseteq A^{\triangledown}$.

Beweis. Es gelte $A \subseteq B$.
Sei nun $x \in B^{\triangle}$. Dann gilt $y \sqsubseteq x$ für alle $y \in B$. Da $A \subseteq B$, gilt auch $z \sqsubseteq x$ für alle $z \in A$. Damit ist x auch obere Schranke von A, also $x \in A^{\triangle}$.
Sei nun $x \in B^{\triangledown}$. Dann gilt $x \sqsupseteq y$ für alle $y \in B$. Da $A \subseteq B$, gilt auch $x \sqsupseteq z$ für alle $z \in A$. Damit ist x eine untere Schranke von A, also $x \in A^{\triangledown}$.

□

Präsenzaufgabe 3
Voraussetzung: Sei M eine Menge. Wir betrachte die geordenete Menge $(M, \mathbf{I}_M)$ und $A \subseteq M$.
Behauptung:

(a) Die Mächtigkeit der Menge der maximalen (bzw. minimalen) Elemente von A ist gleich $|A|$.

(b) Ist $|A| \neq 1$, so gibt es kein größtes oder kleinstes Element in A. Falls aber $|A| = 1$, so gibt es genau ein größtes und ein kleinstes Element in A (und diese sind gleich).