CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut
für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Serie 11

Abgabe: 29.01.2018

Präsenzaufgabe 1

Wir definieren die Relation $\sqsubseteq$ auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ für alle $(a, b), (c, d) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ durch

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) :\Longleftrightarrow \ a \leq c \wedge b \leq d$$

(a) Zeigen Sie, dass $\sqsubseteq$ eine Ordnungsrelation ist.

(b) Untersuchen Sie die Menge $D := \{ (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid x + y \leq 3 \}$ auf extreme Elemente bezüglich $\sqsubseteq$.

(c) Untersuchen Sie, ob $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \sqsubseteq)$ linear geordnet ist.

Präsenzaufgabe 2

Seien $(M, \sqsubseteq)$ eine geordnete Menge und $A, B \subseteq M$. Zeigen Sie: Aus $A \subseteq B$ folgen $B^{\triangle} \subseteq A^{\triangle}$ und $B^{\triangledown} \subseteq A^{\triangledown}$.

Präsenzaufgabe 3

Sei M eine Menge. Untersuchen Sie die Relation $\mathbf{I}_M$ hinsichtlich aller Teilmengen von M auf extreme Elemente.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten die geordnete Menge $(\mathbb{N}, |)$ und die Menge $A := \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7 \}$.

(a) Geben Sie (ohne Begründung), minimale und maximale Elemente sowie größtes und kleinstes Element von A an, sofern diese existieren.

(b) Geben Sie (ohne Begründung) die Menge $\mathbb{N}^{\triangle}$ und $A^{\triangledown}$ explizit an.

Hausaufgabe 5 (7 Punkte)

Sei M eine Menge und die Relation $\trianglelefteq$ auf der Menge M^* für alle $s, t \in M^*$ wie folgt definiert:

$$s \trianglelefteq t \ :\Longleftrightarrow \ \exists\, u \in M^* : s \,\&\, u = t \,.$$

Zeigen Sie, dass $\trianglelefteq$ eine Ordnungsrelation ist. Sie dürfen dazu verwenden, dass für alle $s, t \in M^*$ gilt:

(1) $s \,\&\, t = s \Longleftrightarrow t = ()$ (2) $s \,\&\, t = () \Longleftrightarrow s = () \wedge t = ()$.

Hausaufgabe 6 (8 Punkte, Teil einer Klausuraufgabe im WS 2016/17)

Es seien $(M_1, \sqsubseteq_1)$ und $(M_2, \sqsubseteq_2)$ geordenete Mengen. Wir definieren auf dem direkten Produkt $M_1 \times M_2$ eine Relation $\sqsubseteq$, indem wir für alle $(a, b) \in M_1 \times M_2$ und $(c, d) \in M_1 \times M_2$ festlegen:

$$(a, b) \sqsubseteq (c, d) \ :\Longleftrightarrow \ a \sqsubseteq_1 c \wedge b \sqsubseteq_2 d.$$

(a) Zeigen Sie: $\sqsubseteq$ ist eine Ordnungsrelation.

(b) Zeigen Sie: Ist x das kleinste Element von M_1 in $(M_1, \sqsubseteq_1)$ und ist y das kleinste Element von M_2 in $(M_2, \sqsubseteq_2)$, so ist (x, y) das kleinste Element von $M_1 \times M_2$ in $(M_1 \times M_2, \sqsubseteq)$.