CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für Informatiker A

Wintersemester 2017/18

Lösungsvorschläge zu Serie 10

Hausaufgabe 1 (4 + 2 Punkte)
Voraussetzung: Wir definieren die Relation $\equiv$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, indem wir für alle $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ setzen

$$(a, b) \equiv (c, d) \;::\Longleftrightarrow\; a - d = c - b \,.$$

Sei die Funktion $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x, y) = (y, x)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) *Beh.:* Die Relation $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis. Refl.: Sei $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann gilt $a - b = a - b$ und damit ist $(a, b) \equiv (a, b)$.
Symm.: Seien $(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und es gelte $(a, b) \equiv (c, d)$. Dann gilt $a - d = c - b$. Insbesondere gilt auch $c - b = a - d$ und damit $(c, d) \equiv (a, b)$.
Trans.: Seien $(a, b), (c, d), (e, f) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und es gelte $(a, b) \equiv (c, d)$ und $(c, d) \equiv (e, f)$. Dann gelten $a - d = c - b$ und $c - f = e - d$. [Z. z.: $a - f = e - b$.] Es gilt:

$$\begin{aligned} a - f &= a + (e - d - c) && \text{da } c - f = e - d\text{, also } -f = e - d - c \\ &= a - d + e - c \\ &= c - b + e - c && \text{da } a - d = c - b \\ &= -b + e = e - b \,. \end{aligned}$$

□

Jeweils einen Punkt für die Reflexivität und die Symmetrie und zwei für die Transitivität. Alle Rechnungen kann man auch mit Hilfe logischer Umformungen machen.

(b) *Beh.:* Die Funktion f ist bijektiv und es gilt $f^{-1} = f$.

Beweis. Wir zeigen, dass $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$ gilt und sind fertig, weil es dann Links- und Rechtsinverse von sich selbst ist. Dann ist f nämlich bijektiv und es gilt $f^{-1} = f$. Sei $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$(f \circ f)(a, b) = f(f(a, b)) = f(b, a) = (a, b) = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}(a, b) \,.$$

□

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)
Voraussetzung: Seien A eine Menge und $\mathcal{A} := \{\, R \in \mathcal{P}(A \times A) \mid R \text{ Äquivalenzrelation} \,\}$.
Behauptung: Für jedes nichtleere $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$ gilt: $\bigcap \mathcal{R}$ ist Äquivalenzrelation.

Beweis. Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$ mit $\mathcal{R} \neq \emptyset$.
Refl.: Seien $x \in A$ und $R \in \mathcal{R}$. Dann gilt xRx, da R reflexiv ist, also $(x, x) \in R$. Damit gilt also $\forall\, S \in \mathcal{R} : (x, x) \in S$ und daher $(x, x) \in \bigcap \mathcal{R}$.
Symm.: Seien $x, y \in A$ mit $(x, y) \in \bigcap \mathcal{R}$ und $R \in \mathcal{R}$. Wegen $(x, y) \in \bigcap \mathcal{R}$ ist auch $(x, y) \in R$ und weil R symmetrisch ist, haben wir $(y, x) \in R$. Nach Definition des Schnittes gilt also $(y, x) \in \bigcap \mathcal{R}$.
Trans.: Seien $x, y, z \in A$ mit $(x, y), (y, z) \in \bigcap \mathcal{R}$ und $R \in \mathcal{R}$. Dann gilt $(x, y), (y, z) \in R$. Da R auch transitiv ist, folgt $(x, z) \in R$ und damit $(x, z) \in \bigcap \mathcal{R}$.
Man kann alle Teile auch durch logische Umformungen machen. Die Reflexivität und die Symmetrie sind kein Problem, bei der Transitivität muss im Falle logischer Umformungen genau auf die Pfeilrichtung geachtet werden. Es gibt einen Punkt für die Reflexivität, und jeweils zwei für die anderen beiden Eigenschaften. □

Hausaufgabe 3 (8+1 Punkte)

Voraussetzung: Sei M eine nichtleere Menge. Wir definieren die Relation $\equiv$ auf der Menge $\mathcal{S}(M)$ der bijektiven Funktionen auf M, indem wir für alle $f, g \in \mathcal{S}(M)$ festlegen: $f \equiv g \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, h \in \mathcal{S}(M) : f = h \circ g \circ h^{-1}$

Behauptung:

(a) $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Im Fall $|M| = 2$ gilt $|\mathcal{S}(M)/\equiv| = 2$.

Beweis. (a) *Reflexiv*: Sei $f \in \mathcal{S}(M)$. Setze $h := id_M$. Es ist id_M bijektiv, also $h \in \mathcal{S}(M)$, und $id_M^{-1} = id_M$. Weiter gilt, da id_M rechts- und linksneutral: $f = id_M \circ f \circ id_M = id_M \circ f \circ id_M^{-1} = h \circ f \circ h^{-1}$. Also folgt mit der Definition von $\equiv$ auch $f \equiv f$.

Symmetrisch: Seien $f, g \in \mathcal{S}(M)$ mit $f \equiv g$. Nach Definition von $\equiv$ gibt es also $h \in \mathcal{S}(M)$ mit $f = h \circ g \circ h^{-1}$. Setze $h' := h^{-1}$. Da $h \in \mathcal{S}(M)$, gilt auch $h' \in \mathcal{S}(M)$. Weiter gilt:

$$
\begin{aligned}
f = h \circ g \circ h^{-1} &\Longleftrightarrow f \circ h = h \circ g \circ h^{-1} \circ h \\
&\Longleftrightarrow h^{-1} \circ f \circ h = h^{-1} \circ h \circ g \circ h^{-1} \circ h \\
&\Longleftrightarrow h^{-1} \circ f \circ h = id_M \circ g \circ id_M && \text{Definition Umkehrfunktion} \\
&\Longleftrightarrow h^{-1} \circ f \circ h = g && id_M \text{ rechts- und linksneutral}
\end{aligned}
$$

Nach Definition von $\equiv$ folgt $g \equiv f$.

Transitiv: Seien $f, g, h \in \mathcal{S}(M)$ mit $f \equiv g$ und $g \equiv h$. Nach Definition von $\equiv$ gibt es also $h_1, h_2 \in \mathcal{S}(M)$ mit $f = h_1 \circ g \circ h_1^{-1}$ und $g = h_2 \circ h \circ h_2^{-1}$. Setze $h_3 := h_1 \circ h_2$. Da $h_1, h_2 \in \mathcal{S}(M)$, gilt auch $h_3 \in \mathcal{S}(M)$, da die Komposition bijektiver Funktionen wieder bijektiv ist. Weiter gilt

$$
f = h_1 \circ g \circ h_1^{-1} = h_1 \circ h_2 \circ h \circ h_2^{-1} \circ h_1^{-1} = h_1 \circ h_2 \circ h \circ (h_1 \circ h_2)^{-1},
$$

wobei die letzte Gleichheit mit dem Hinweis folgt. Nach Definition von $\equiv$ folgt $f \equiv h$. □

(b) -

(a) Zwei Punkte gibt es für die Reflexivität und jeweils drei für die beiden anderen Eigenschaften. Es gibt dabei jeweils einen Punkt für die Angabe eines richtigen hs. Die restlichen für die Begründungen bzw. Rechnungen.