CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18 Abgabe: 22.01.2017

Serie 10

Präsenzaufgabe 1 (Klausuraufgabe im WS 2016/17)
Es sei $n \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Wir definieren die Relation $\equiv$ auf der Menge $\{0,1\}^n$, indem wir für alle $s, t \in \{0,1\}^n$ setzen:

$$s \equiv t \;:\Longleftrightarrow\; s_1 = t_1$$

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist.
(b) Geben Sie für $n = 3$ die drei Mengen $[(0,0,0)]_\equiv$, $[(1,0,0)]_\equiv$ und $\{0,1\}^3 / \equiv$ explizit an.
(c) Bestimmen Sie ohne Begründungen die Kardinalität der Äquivalenzklasse $[s]_\equiv$ für alle $s \in \{0,1\}^n$ und auch die Kardinalität der Menge $\{0,1\}^n / \equiv$ aller Äquivalenzklassen.

Präsenzaufgabe 2

(a) Untersuchen Sie die folgenden Aussagen auf ihre Gültigkeit und begründen Sie Ihre Ergebnisse:
(i) $15 \equiv_2 6$ (ii) $19 \equiv_7 5$ (iii) $2 \equiv_3 -8$.

(b) Seien $k, l \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass aus $k \mid l$ die Inklusion $\equiv_l \subseteq \equiv_k$ folgt.

Hausaufgabe 3 (6 Punkte, Teil einer Klausuraufgabe im WS 2014/15)
Wir definieren die Relation $\equiv$ auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, indem wir für alle $(a,b), (c,d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ setzen

$$(a,b) \equiv (c,d) \;:\Longleftrightarrow\; a - d = c - b\ .$$

Sei die Funktion $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definiert durch $f(x,y) = (y,x)$ für alle $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) Die Relation $\equiv$ ist eine Äquivalenzrelation.
(b) Die Funktion f ist bijektiv und es gilt $f^{-1} = f$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)
Seien A eine Menge und $\mathcal{A} := \{ R \in \mathcal{P}(A \times A) \mid R \text{ Äquivalenzrelation} \}$. Zeigen Sie, dass für jedes nichtleere $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A}$ gilt: $\bigcap \mathcal{R}$ ist Äquivalenzrelation.

Hausaufgabe 5 ($8 + 1$ Punkte, Teil einer Klausuraufgabe im WS 2016/17)
Gegeben sei eine nichtleere Menge M. Wir definieren die Relation $\equiv$ auf der Menge $\mathcal{S}(M)$ der bijektiven Funktionen auf M, indem wir für alle $f, g \in \mathcal{S}(M)$ festlegen:

$$f \equiv g \;:\Longleftrightarrow\; \exists\, h \in \mathcal{S}(M) : f = h \circ g \circ h^{-1}$$

(a) Zeigen Sie, dass $\equiv$ eine Äquivalenzrelation ist.

(b) Geben Sie im Fall $|M| = 2$ die Kardinalität der Menge $\mathcal{S}(M)/\equiv$ der Äquivalenzklassen von $\equiv$ an (ohne Begründung).

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass $f^{-1} \circ g^{-1} = (g \circ f)^{-1}$ für alle $f, g \in \mathcal{S}(M)$ gilt.