CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18 — Bearbeitungszeit: 60 Minuten
18.12.2017

Lösungsvorschläge zur Probeklausur

Aufgabe 1 (12 Punkte)
Die Punktzahl ist die Anzahl der richtig gesetzten weniger der Anzahl der falsch gesetzten Kreuze.

(a) Kreuzen Sie für jede der folgenden Formeln an, ob diese für alle nichtleeren Mengen von Mengen $\mathcal{M}$ wahr oder falsch sind.

$\bigcup \mathcal{P}(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$	☒ wahr	☐ falsch
$\bigcap \mathcal{P}(\mathcal{M}) = \emptyset$	☒ wahr	☐ falsch
$\bigcup \mathcal{M} \subseteq \bigcap \mathcal{M}$	☐ wahr	☒ falsch
$\bigcap \mathcal{M} \subseteq \bigcup \mathcal{M}$	☒ wahr	☐ falsch

(b) Kreuzen Sie für jede der folgenden logischen Äquivalenzen an, ob diese für alle Mengen M und Aussagen $A(x)$ gelten.

$\forall\, x \in M : A(x) \iff \forall\, x : x \in M \Rightarrow A(x)$	☒ wahr	☐ falsch
$\forall\, x \in M : A(x) \iff \forall\, x : x \in M \wedge A(x)$	☐ wahr	☒ falsch
$\exists\, x \in M : A(x) \iff \exists\, x : x \in M \Rightarrow A(x)$	☐ wahr	☒ falsch
$\exists\, x \in M : A(x) \iff \exists\, x : x \in M \wedge A(x)$	☒ wahr	☐ falsch

(c) Wir definieren die Relation $R := \{\, (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid y \leq x \,\}$. Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese wahr oder falsch sind.

R ist eindeutig.	☐ wahr	☒ falsch
R ist total.	☒ wahr	☐ falsch
$(0, 1) \in R$.	☐ wahr	☒ falsch
$(1, 0) \in R$.	☒ wahr	☐ falsch

Aufgabe 2 (2+2+3 Punkte)
Voraussetzung: Gegeben sei die Menge $M := \{\, 0, 1 \,\}$.
Behauptung:

(a) Es gilt $A := \{\, (0, 0, 0), (1, 1, 1) \,\}$.
(b) Es gilt: $B := \{\, (1, 0, 1), (0, 1, 0) \,\}$.
(c) Es gilt $|M^3| = 8$, $|A \times B| = 4$ und $|\mathcal{P}(B)| = 4$ an.

Beweis. - ☐

Aufgabe 3 (5+4 Punkte)
Voraussetzung: Für alle $s, t \in \mathbb{N}^+$ definieren wir $s \sim t :\iff \mathsf{rest}(s) = \mathsf{rest}(t)$.
Behauptung:

(a) $\sim$ ist nicht eindeutig.
(b) $\sim$ ist total.

(a) *Beweis.* Setze $s := 0 : ()$, $t := 0 : ()$ und $u := 1 : ()$. Wegen $0, 1 \in \mathbb{N}$ gilt $s, t, u \in \mathbb{N}^+$. Nach Definition von rest gilt $\mathsf{rest}(s) = () = \mathsf{rest}(t)$ und $\mathsf{rest}(s) = () = \mathsf{rest}(u)$, also $s \sim t$ und $s \sim u$. Außerdem gilt wegen $\mathsf{kopf}(t) = 1 \neq 0 = \mathsf{kopf}(u)$, nach Definition von Gleichheit von Listen, dass $t \neq u$. Damit ist $\sim$ nicht eindeutig. $\square$

(b) *Beweis.* Sei $s \in \mathbb{N}^+$. Setze $t := s$. Dann gilt auch $\mathsf{rest}(s) = \mathsf{rest}(t)$ nach der Definition von Gleichheit von Listen. Also gilt nach Definition von $\trianglelefteq$ auch $s \trianglelefteq t$. Damit ist $\trianglelefteq$ total. $\square$

Aufgabe 4 (5+7 Punkte)
Voraussetzung: Gegeben sei eine Menge M und $A, B \subseteq M$. Das Komplement wird hier bezüglich der Menge M gebildet.
Behauptung:

(a) Aus $A \subseteq B$ folgt $A \cap \overline{B} = \emptyset$.
(b) Es gilt $A \subseteq \overline{B} \iff A \cap B = \emptyset$.

(a) *Beweis.* Es gelte $A \subseteq B$. Wir zeigen nun $A \cap \overline{B} = \emptyset$ durch Widerspruch.
Angenommen es gilt $\neg(A \cap \overline{B} = \emptyset)$. Dann gilt also $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$. Damit gibt es ein Objekt x mit $x \in A \cap \overline{B}$. Nach Definition des Schnitts gilt also $x \in A$ und $x \in \overline{B}$. Nach Definition des Komplements gilt damit $x \in M$ und $x \notin B$. Da $A \subseteq B$, folgt auch $x \in A$ auch $x \in B$. Dies ist ein Widerspruch. $\square$

Natürlich kann hier auch gleich zu Beginn die Implikation verneint werden. Der Beweis läuft dann gleich.

(b) *Beweis.* Wir haben

$$
\begin{aligned}
A \subseteq \overline{B} &\iff \forall x : x \in A \Rightarrow x \in \overline{B} && \text{Definition } \subseteq \\
&\iff \forall x : \neg(x \in A) \vee x \in \overline{B} && \text{Implikation auflösen} \\
&\iff \forall x : \neg(x \in A) \vee (x \in M \wedge \neg(x \in B)) && \text{Definition Komplement} \\
&\iff \forall x : (\neg(x \in A) \vee x \in M) \wedge (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) && \text{Distributivgesetz} \\
&\iff (\forall x : (\neg(x \in A) \vee x \in M)) \wedge (\forall x : (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))) && \text{Satz 2.3.9 (2)} \\
&\iff (\forall x : (x \in A \Rightarrow x \in M) \wedge (\forall x : (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))) && \text{Implikation auflösen} \\
&\iff \mathsf{wahr} \wedge (\forall x : (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B))) && A \subseteq M \\
&\iff \forall x : (\neg(x \in A) \vee \neg(x \in B)) && \mathsf{wahr} \wedge X \iff X \\
&\iff \forall x : \neg(x \in A \wedge x \in B) && \text{de Morgan} \\
&\iff \neg\exists x : x \in A \wedge x \in B && \text{Satz 2.3.9 (2)} \\
&\iff \neg\exists x : x \in A \cap B && \text{Definition } \cap \\
&\iff A \cap B = \emptyset && \text{Definition } \emptyset
\end{aligned}
$$

$\square$