CHRISTIAN-ALBRECHTS-UNIVERSITÄT ZU KIEL
Institut für Informatik

R. Berghammer

Institut für Informatik

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18 | Bearbeitungszeit: 120 Minuten

08.02.2018

Lösungsvorschläge zur Klausur

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bei dieser Aufgabe gibt es für jedes richtig gesetzte Kreuz einen halben Punkt und für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Setzen Sie kein Kreuz, so wird die entsprechende Zeile nicht gezählt. Die Punktzahl ist damit die Anzahl der richtig gesetzten weniger der Anzahl der falsch gesetzten Kreuze.

(a) Kreuzen Sie für jede der folgenden Formeln an, ob diese für alle Mengen M wahr oder falsch ist.

$\emptyset \in \mathcal{P}(M)$	☒ wahr	☐ falsch
$\emptyset \subseteq \mathcal{P}(M)$	☒ wahr	☐ falsch
$M \in \mathcal{P}(M)$	☒ wahr	☐ falsch
$M \subseteq \mathcal{P}(M)$	☐ wahr	☒ falsch

(b) Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese wahr oder falsch ist.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (a,b) \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \}$	☒ wahr	☐ falsch
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (a,b) \mid \exists\, n \in \mathbb{N} : \exists\, m \in \mathbb{N} : n = a \wedge m = b \}$	☒ wahr	☐ falsch
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ x \mid \forall\, a \in \mathbb{N} : \forall\, b \in \mathbb{N} : x = (a,b) \}$	☐ wahr	☒ falsch
$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ x \mid \exists\, a \in \mathbb{N} : \exists\, b \in \mathbb{N} : x = (a,b) \}$	☒ wahr	☐ falsch

(c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$. Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese wahr oder falsch ist.

f besitzt eine Linksinverse.	☒ wahr	☐ falsch
f besitzt eine Rechtsinverse.	☐ wahr	☒ falsch
f ist bijektiv.	☐ wahr	☒ falsch
f besitzt eine Umkehrfunktion.	☐ wahr	☒ falsch

(d) Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese für alle Äquivalenzrelationen $\equiv$ und $\sim$ auf der Menge $\mathbb{N}$ wahr oder falsch ist.

$\equiv \cup \sim$ ist Äquivalenzrelation.	☐ wahr	☒ falsch
$\equiv \cap \sim$ ist Äquivalenzrelation.	☒ wahr	☐ falsch
$\equiv \cup \sim$ ist linear.	☐ wahr	☒ falsch
$\equiv \cap \sim$ ist linear.	☐ wahr	☒ falsch

(e) Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese für alle Monoide $(M, e, \cdot)$ wahr oder falsch ist.

$e \cdot e = e$	☒ wahr	☐ falsch
$\forall\, x, y \in M : x \cdot y = y \cdot x$	☐ wahr	☒ falsch
$\forall\, x \in M : x \cdot x \in M$	☒ wahr	☐ falsch
$\forall\, x \in M : x \cdot x = x$	☐ wahr	☒ falsch

Aufgabe 2 (3 + 7 Punkte)
Behauptung:

(a) Gegeben sei $\mathcal{S} := \{ R \in \mathcal{P}(\{ 0,1 \} \times \{ 1 \}) \mid R$ ist eindeutig $\}$. Dann gilt:

$$\mathcal{S} = \{ \emptyset, \{ (0,1) \}, \{ (1,1) \}, \{ (0,1), (1,1) \} \}$$

(b) Gegeben seien Mengen A und B und eine Menge von eindeutigen Relationen $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ so, dass für alle $R, S \in \mathcal{R}$ gilt $R \subseteq S$ oder $S \subseteq R$. Dann gilt, dass $\bigcup \mathcal{R}$ eindeutig ist.

(a) -

(b) *Beweis.* (z.z. $\bigcup \mathcal{R}$ ist eindeutig, d.h. $\forall\, x \in A : \forall\, y, z \in B : (x,y) \in \bigcup \mathcal{R} \wedge (x,z) \in \bigcup \mathcal{R} \Rightarrow y = z$)
Seien $x \in A$ und $y, z \in B$. Es gelte $(x,y) \in \bigcup \mathcal{R}$ und $(x,z) \in \bigcup \mathcal{R}$. (z.z. $y = z$)
Wegen $(x,y) \in \bigcup \mathcal{R}$ gibt es nach Def. von $\bigcup$ ein $R \in \mathcal{R}$ mit $(x,y) \in R$. Wegen $(x,z) \in \bigcup \mathcal{R}$ gibt es nach Def. von $\bigcup$ ein $S \in \mathcal{R}$ mit $(x,z) \in S$. Nach Voraussetzung gilt nun $R \subseteq S$ oder $S \subseteq R$.
1. Fall: Es gilt $R \subseteq S$. Dann folgt aus $(x,y) \in R$, dass $(x,y) \in S$. Da $S \in \mathcal{R}$, ist S eindeutig. Damit folgt aus $(x,y) \in S$ und $(x,z) \in S$, dass $y = z$.
2. Fall: Es gilt $S \subseteq R$. Dann folgt aus $(x,z) \in S$, dass $(x,z) \in R$. Da $R \in \mathcal{R}$, ist R eindeutig. Damit folgt aus $(x,y) \in R$ und $(x,z) \in R$, dass $y = z$. □

Aufgabe 3 (8 Punkte)
Behauptung: Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt: $(a^m)^n = a^{mn}$.

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $(a^m)^n = a^{mn}$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion über n. Wir definieren dazu für alle $n \in \mathbb{N}$ die Aussage $A(n)$ als $\forall\, m \in \mathbb{N} : (a^m)^n = a^{mn}$.
(IB): Wir zeigen $A(0)$, d.h. $\forall\, m \in \mathbb{N} : (a^m)^0 = a^{m0}$. Sei also $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt nach Definition der Potenz:

$$(a^m)^0 = 1 = a^0 = a^{m0}.$$

(IS): Sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte die Aussage $A(n)$, d.h. $\forall\, m \in \mathbb{N} : (a^m)^n = a^{mn}$. Wir nennen $A(n)$ die Induktionsvoraussetzung und zeigen, dass nun auch $A(n+1)$, d.h. $\forall\, m \in \mathbb{N} : (a^m)^{n+1} = a^{m(n+1)}$ gilt. Sei also $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$(a^m)^{n+1} \overset{\text{Def. Potenz}}{=} a^m (a^m)^n \overset{\text{I.V.}}{=} a^m a^{mn} = a^{mn} a^m \overset{\text{Hinweis}}{=} a^{mn+m} = a^{m(n+1)}$$

Dies liefert die Gültigkeit von $A(n+1)$ und damit folgt die zu beweisende Aussage. □

Aufgabe 4 (6 + 5 + 1 Punkte)
Voraussetzung: Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $g(n) = \{ nx \mid x \in \mathbb{N} \}$.
Behauptung:

(a) g injektiv ist.
(b) g nicht surjektiv ist.
(c) Es gilt $g^{-1}(\{ \mathbb{N} \}) = \{ 1 \}$.

(a) *Beweis.* (z.z. $\forall\, n, m \in \mathbb{N} : g(n) = g(m) \Rightarrow n = m$)
Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Es gelte $g(n) = g(m)$. Also gilt $\{\, nx \mid x \in \mathbb{N} \,\} = \{\, mx \mid x \in \mathbb{N} \,\}$. Da $1 \in \mathbb{N}$, gilt $n \in \{\, nx \mid x \in \mathbb{N} \,\}$ und $m \in \{\, mx \mid x \in \mathbb{N} \,\}$. Wegen $\{\, nx \mid x \in \mathbb{N} \,\} = \{\, mx \mid x \in \mathbb{N} \,\}$ gilt auch $n \in \{\, mx \mid x \in \mathbb{N} \,\}$ und $m \in \{\, nx \mid x \in \mathbb{N} \,\}$. Es gibt also $x, y \in \mathbb{N}$ mit $n = mx$ und $m = ny$. Also ist $n = nyx$, also $yx = 1$. Da $x, y \in \mathbb{N}$, folgt $x = y = 1$. Wegen $n = mx$ folgt daraus $n = m$. $\square$

(b) *Beweis.* (z.z. $\exists\, Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : \forall\, n \in \mathbb{N} : g(n) \neq Y$)
Setze $Y := \emptyset$. Nach Def. der Potenzmenge gilt $\emptyset \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, also $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Da $0 \in \mathbb{N}$, gilt $0 = n \cdot 0 \in \{\, nx \mid x \in \mathbb{N} \,\} = g(n)$. Also ist $g(n) \neq \emptyset = Y$. Damit ist g nicht surjektiv. $\square$

Aufgabe 5 ($5 + 3 + 4$ Punkte)
Gegeben sei die Teilbarkeitsrelation $\mid$ auf der Menge $\mathbb{N}$.

(a) $(\mathbb{N}, \mid)$ ist eine geordnete Menge.
(b) 0 ist größtes Element der Menge $\mathbb{N}$ in $(\mathbb{N}, \mid)$.
(c) Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k|l$ gilt: $\{\, k \,\}^{\triangledown} \subseteq \{\, l \,\}^{\triangledown}$.

(a) *Beweis.* (z.z. $\mid$ ist reflexiv, antisymmetrisch und transitiv)
refl.: (z.z. $\forall\, x \in \mathbb{N} : x|x$)
Sei $x \in \mathbb{N}$. (z.z. $x|x$, d.h. $\exists\, n \in \mathbb{N} : nx = x$) Setze $n := 1$. Dann ist $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $nx = 1x = x$. Also gilt $x|x$ nach Def. von $\mid$.
antisymm.: (z.z. $\forall\, x, y \in \mathbb{N} : x|y \wedge y|x \Rightarrow x = y$)
Seien $x, y \in \mathbb{N}$. Es gelte $x|y$ und $y|x$. (z.z. $x = y$)
Wegen $x|y$ und $y|x$ gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $nx = y$ und $my = x$. Also ist $mnx = x$, also $mn = 1$. Da $m, n \in \mathbb{N}$, folgt $m = n = 1$. Wegen $nx = y$ folgt daraus $x = y$.
trans.: (z.z. $\forall\, x, y, z \in \mathbb{N} : x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$)
Seien $x, y, z \in \mathbb{N}$. Es gelte $x|y$ und $y|z$. (z.z. $x|z$, d.h. $\exists\, p \in \mathbb{N} : px = z$)
Wegen $x|y$ und $y|z$ gibt es $n, m \in \mathbb{N}$ mit $nx = y$ und $my = z$. Setze $p := mn$. Da $m, n \in \mathbb{N}$, ist auch $p \in \mathbb{N}$. Weiter gilt $px = mnx = my = z$. Also gilt $x|z$ nach Def. von $\mid$. $\square$

(b) *Beweis.* (z.z. $\forall\, x \in \mathbb{N} : x|0$)
Sei $x \in \mathbb{N}$. (z.z. $x|0$, d.h. $\exists\, n \in \mathbb{N} : nx = 0$)
Setze $n := 0$. Dann ist $n \in \mathbb{N}$ und es gilt $nx = 0x = 0$. Also gilt $x|0$ nach Def. von $\mid$. $\square$

(c) *Beweis.* Seien $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k|l$. (z.z. $\{\, k \,\}^{\triangledown} \subseteq \{\, l \,\}^{\triangledown}$)
Sei $x \in \{\, k \,\}^{\triangledown}$. (z.z. $x \in \{\, l \,\}^{\triangledown}$)
Nach Def. ist x also untere Schranke von der Menge $\{\, k \,\}$, also von k selbst. Also gilt $x|k$. Wegen $k|l$ folgt mit der Transitivität von $\mid$, dass $x|l$ gilt. Damit ist x untere Schranke von l, also gilt nach Def. $x \in \{\, l \,\}^{\triangledown}$. $\square$

Aufgabe 6 ($6 + 2$ Punkte)
Voraussetzung: Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeben durch $g(X) = f(X)$.
Behauptung:

(a) g ist monoton.
(b) g hat einen Fixpunkt.

(a) *Beweis.* (z.z. $\forall\, A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : A \subseteq B \Rightarrow g(A) \subseteq g(B)$)
Seien $A, B \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Es gelte $A \subseteq B$. (z.z. $g(A) \subseteq g(B)$)
Sei $x \in g(A)$. (z.z. $x \in g(B)$, d.h. $x \in g(B)$, d.h. $\exists\, b \in B : f(b) = x$)
Wegen $x \in g(A)$ gilt nach Def. von g, dass $x \in f(A)$. Nach Def. des Bildes gibt es also ein $a \in A$ mit $f(a) = x$. Setze nun $b := a$. Dann gilt $b \in B$, da $a \in A$ und $A \subseteq B$. Es gilt weiter $f(b) = f(a) = x$, also nach Def. des Bildes $x \in f(B)$. Also gilt nach Def. von g, dass $x \in g(B)$. Damit gilt $g(A) \subset g(B)$. Also ist g monoton. □

(b) *Beweis.* Nach Aufgabenteil a) ist g monoton und besitzt nach dem Fixpunktsatz von Knaster-Tarksi einen Fixpunkt. □