

Mathematik für die Informatik A

Wintersemester 2017/18

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

08.02.2018

Klausur

Wichtige Hinweise:

- Klausureinsicht und -rückgabe: Freitag, den 16.02.2018, in Raum CAP3 - Hörsaal 3 um:
 - 10:15 - 10:45 Uhr für Studierende, deren Nachnamen mit A-J beginnen
 - 10:45 - 11:15 Uhr für Studierende, deren Nachnamen mit K-P beginnen
 - 11:15 - 11:45 Uhr für Studierende, deren Nachnamen mit Q-Z beginnen
 Das Vorzeigen eines gültigen Lichtbildausweises ist für die Einsicht erforderlich.
- Dieses Aufgabenblatt muss am Ende der Klausur mit abgegeben werden.

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Bei dieser Aufgabe gibt es für jedes richtig gesetzte Kreuz einen halben Punkt und für jedes falsch gesetzte Kreuz wird ein halber Punkt abgezogen. Setzen Sie kein Kreuz, so wird die entsprechende Zeile nicht gezählt.

(a) Kreuzen Sie für jede der folgenden Formeln an, ob diese für alle Mengen M wahr oder falsch ist.

- | | | |
|--------------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| $\emptyset \in \mathcal{P}(M)$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(M)$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $M \in \mathcal{P}(M)$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $M \subseteq \mathcal{P}(M)$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |

(b) Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese wahr oder falsch ist.

- | | | |
|---|-------------------------------|---------------------------------|
| $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (a, b) \mid a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \}$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ (a, b) \mid \exists n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{N} : n = a \wedge m = b \}$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ x \mid \forall a \in \mathbb{N} : \forall b \in \mathbb{N} : x = (a, b) \}$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{ x \mid \exists a \in \mathbb{N} : \exists b \in \mathbb{N} : x = (a, b) \}$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |

(c) Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ mit $f(x) = 2x$. Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese wahr oder falsch ist.

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| f besitzt eine Linksinverse. | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| f besitzt eine Rechtsinverse. | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| f ist bijektiv. | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| f besitzt eine Umkehrfunktion. | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |

(d) Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese für alle Äquivalenzrelationen \equiv und \sim auf der Menge \mathbb{N} wahr oder falsch ist.

- | | | |
|--|-------------------------------|---------------------------------|
| $\equiv \cup \sim$ ist Äquivalenzrelation. | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\equiv \cap \sim$ ist Äquivalenzrelation. | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\equiv \cup \sim$ ist linear. | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\equiv \cap \sim$ ist linear. | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |

(e) Kreuzen Sie für jede der folgenden Aussagen an, ob diese für alle Monoide (M, e, \cdot) wahr oder falsch ist.

- | | | |
|--|-------------------------------|---------------------------------|
| $e \cdot e = e$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\forall x, y \in M : x \cdot y = y \cdot x$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\forall x \in M : x \cdot x \in M$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |
| $\forall x \in M : x \cdot x = x$ | <input type="checkbox"/> wahr | <input type="checkbox"/> falsch |

Aufgabe 2 (3 + 7 Punkte)

- (a) Gegeben sei die Menge $\mathcal{S} := \{ R \in \mathcal{P}(\{0, 1\} \times \{1\}) \mid R \text{ ist eindeutig} \}$. Geben Sie die Menge \mathcal{S} explizit an.
- (b) Gegeben seien Mengen A und B und eine Menge von eindeutigen Relationen $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A \times B)$ so, dass für alle $R, S \in \mathcal{R}$ gilt $R \subseteq S$ oder $S \subseteq R$. Zeigen Sie, dass $\bigcup \mathcal{R}$ eindeutig ist.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ die folgende Gleichung gilt: $(a^m)^n = a^{mn}$.
(Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden: Für alle $a \in \mathbb{R}$ und $m, n \in \mathbb{N}$ gilt $a^{m+n} = a^m a^n$.)

Aufgabe 4 (6 + 5 + 1 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ mit $g(n) = \{ nx \mid x \in \mathbb{N} \}$.

- (a) Zeigen Sie, dass g injektiv ist.
- (b) Zeigen Sie, dass g nicht surjektiv ist.
- (c) Geben Sie (ohne Begründung) die Menge $g^{-1}(\{\mathbb{N}\})$ explizit an.

Aufgabe 5 (5 + 3 + 4 Punkte)

Gegeben sei die Teilbarkeitsrelation \mid auf der Menge \mathbb{N} .

- (a) Zeigen Sie, dass (\mathbb{N}, \mid) eine geordnete Menge ist.
- (b) Zeigen Sie, dass die Menge \mathbb{N} in (\mathbb{N}, \mid) ein größtes Element besitzt.
- (c) Zeigen Sie, dass für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \mid l$ gilt: $\{k\}^\nabla \subseteq \{l\}^\nabla$.

Aufgabe 6 (6 + 2 Punkte)

Gegeben sei eine Funktion $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Weiter sei eine Funktion $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ gegeben durch $g(X) = f(X)$.

- (a) Zeigen Sie, dass g monoton ist.
- (b) Folgern Sie aus Aufgabenteil (a) und einem Satz der Vorlesung, dass g einen Fixpunkt besitzt.